

理论力学

第 9 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

中心势中的散射问题 2

小振动 10

一维简谐振子 12

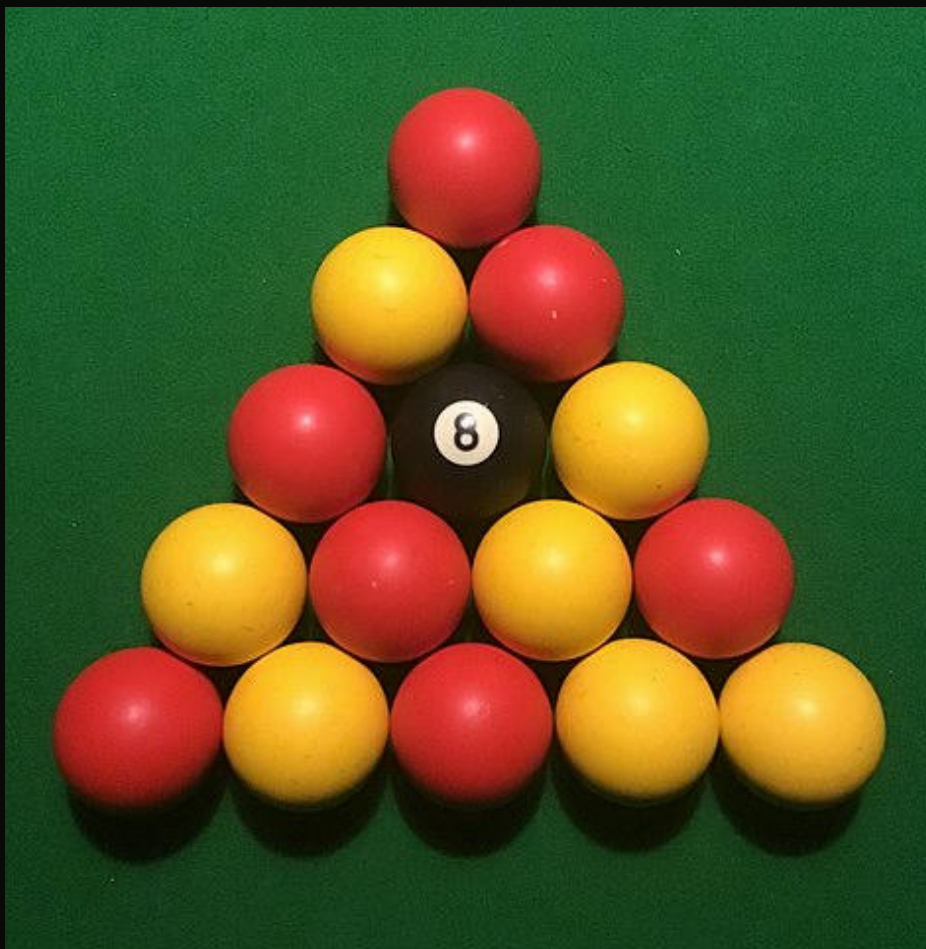
受迫振子 16

阻尼振子 21

中心势中的散射问题

弹性碰撞

- 中心势变成排斥相互作用。
- 两类客体： 散射者和被散射者



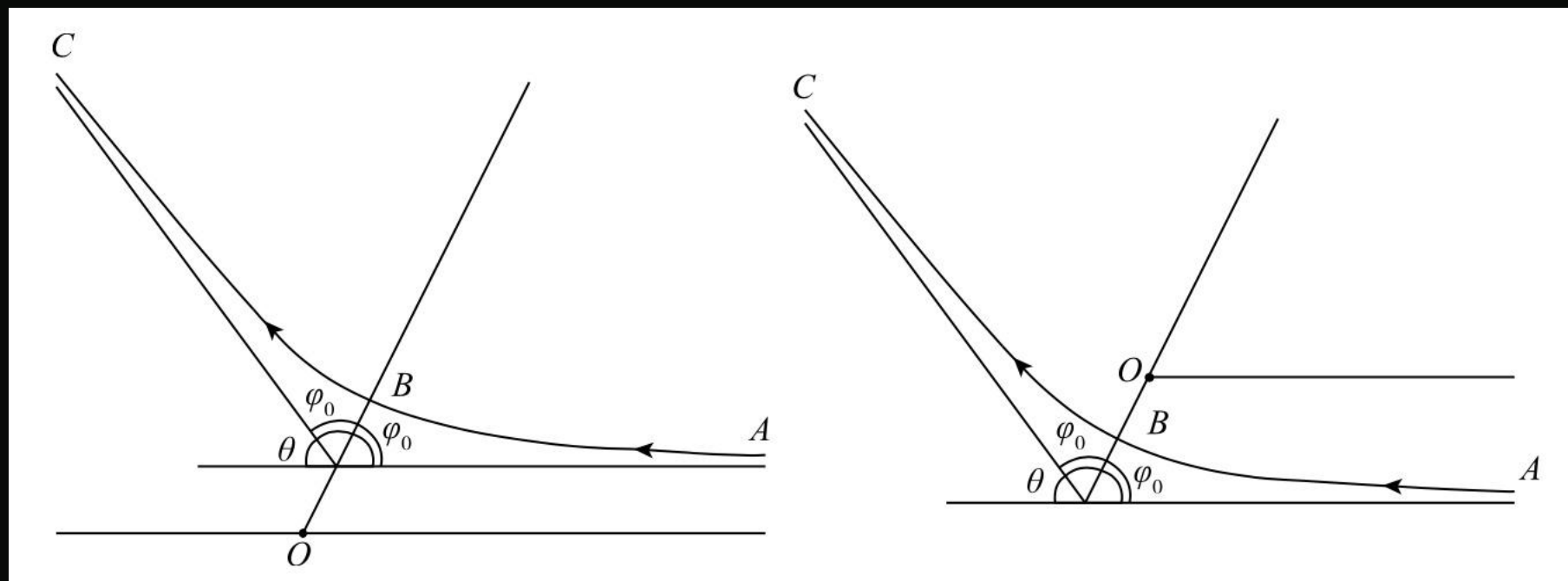
若两个粒子在碰撞前后内部状态不发生改变，则称为弹性碰撞。

弹性碰撞前后（两粒子距离远到相互作用可忽略），总动能和总动量守恒。

- 约化为中心力场下的一体问题，约化质量。
- 角动量守恒，约化为二维平面运动。
- 转换到极坐标，角度和径坐标之间的依赖关系为

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}}.$$

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}.$$



粒子在排斥势和吸引势下散射轨道的示意图

- 排斥势散射角和极坐标方位角之间的关系

$$\theta + 2\varphi_0 = \pi$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]}} dr.$$

- 采用无穷远处速度 v_{∞} 和（横向）瞄准距离 b 来表示运动常数 E 和 J .

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2, \quad J = mbv_{\infty}$$

- 保留 E , 用 E 和 b 来表示 J

$$J = mb\sqrt{(2E)/m} = b\sqrt{2Em}.$$

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{b\sqrt{2Em}/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r) - J^2/(2mr^2)]}} dr \\ &= b \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2[1 - V(r)/E] - b^2}} dr\end{aligned}$$

- 散射角

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2[1 - V(r)/E] - b^2}} dr$$

- 散射截面是物理学中描述粒子间散射过程概率的一个重要概念，尤其在核物理、粒子物理和量子力学中广泛应用。
- 设 I 为入射粒子束的流强，代表单位时间通过单位面积的粒子数。
- 散射率 S ：单位时间发生的总的散射事件的数目
- **总散射截面** σ ：单位时间发生的散射事件数目与入射粒子束流强 I 的比值

$$S = \sigma I$$

- 它定量表示入射粒子与靶粒子发生相互作用的“有效面积”，单位为面积

微分散射截面

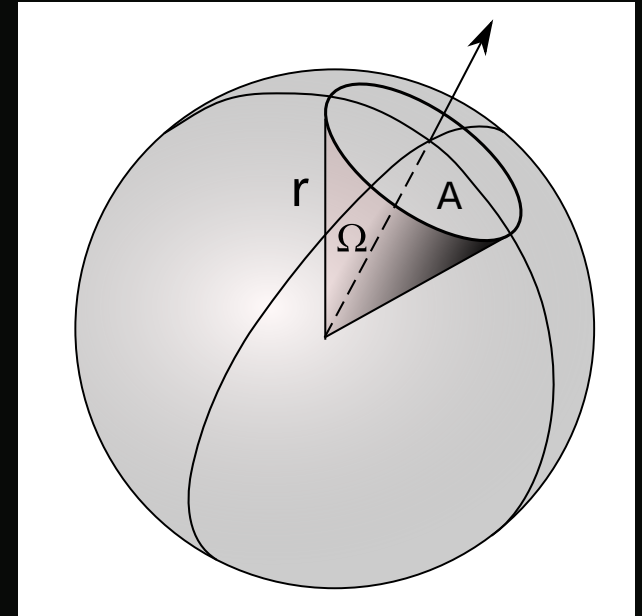
- **微分散射截面**: 单位时间内散射到某个特定方位角内的粒子数 dS 与入射粒子束流强 I 的比值

$$dS = I d\sigma \iff \frac{dS}{d\Omega} = I \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- **微分散射截面**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = I^{-1} \frac{dS}{d\Omega}$$

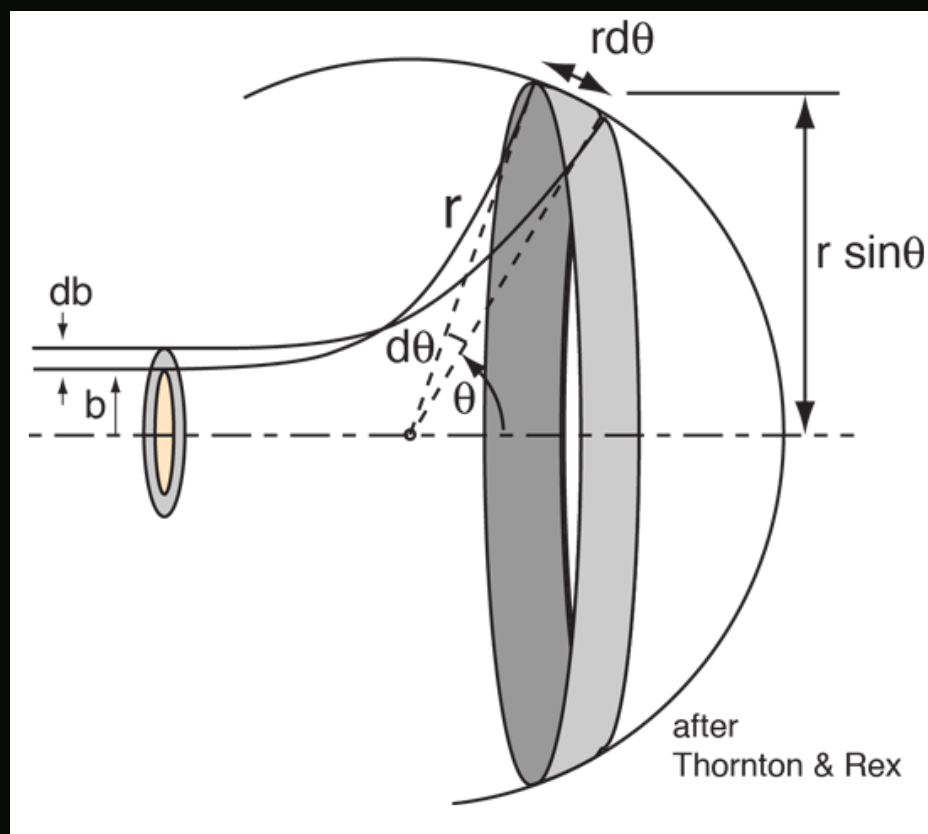
- 微分散射截面: $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$, 它反映将入射粒子散射到某个特定方位角中的散射能力.
- 如何根据中心散射势场来理论求解微分散射截面?



By Solid_Angle.png: Haade / *derivative work:
Habib.mhenni (talk) - Solid_Angle.png, CC BY-SA
3.0

$$dA = r^2 d\Omega$$

微分散射截面



- 方位角: $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$
- 因为散射是以入射粒子束中心轴对称的, 所以微分散射截面只会依赖于 θ .
- 可以将入射粒子流变为在宽度为 db 半径为 b 的环面内的均匀分布。单位时间的入射粒子数目为

$$n = I(2\pi b db)$$

- 根据轨道方程, 这些粒子被散射到 $\theta = \theta(b)$ 附近的 $d\theta$ 微分方位角

- 微分散射截面:

$$2\pi b db = - \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) d\theta d\phi = -2\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) d\theta$$
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = - \frac{b}{\sin(\theta)} \frac{db}{d\theta}$$

第三章作业第 6 题

(下下次课交)

小振动

关键问题：这类问题中如何选取广义坐标

主要结论：简正坐标

数学技术：矩阵对角化

物理系统：简谐振动、受迫振动、阻尼振动

小振动

- 小振动的模型非常普遍，适用于质点在稳定平衡位置附近的运动。
- 一维保守系统

$$L = T - V$$

- 在平衡位置 q_0 附近势能的展开

$$V(q) = \underbrace{V(q_0)}_{\text{常数取零}} + \underbrace{V'(q_0)(q - q_0)}_{\text{平衡位置为零}} + \frac{1}{2}V''(q_0)\underbrace{(q - q_0)^2}_{\text{x}} + \mathcal{O}((q - q_0)^3)$$

- 稳定平衡位置: $k \equiv V''(q_0) > 0$.
- 总动能

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \approx \frac{1}{2}\underbrace{a(q_0)}_{\equiv m}\dot{x}^2$$

一维简谐振子

一维简谐振子

- 质点在稳定平衡位置附近的一维运动的拉格朗日量等价于一维简谐振子

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- 运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \iff \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ 其中 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 二次齐次线性方程：通解、叠加、两个常数，
- 通解的三种表示常见的方法

$$x(t) = c_0 \cos \omega t + c_1 \sin \omega t$$

其中 c_0 和 c_1 为两个实数常数，由初始条件决定。

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

其中 A 为振幅， ϕ 为初始相位。

$$x(t) = a e^{i\omega t}$$

取实部。其中 $a = |a|e^{i\phi}$ 为复振幅， ϕ 为初始相位。

- 能量 $E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 |a|^2$

一维振子的解法

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

- 试探解 $x = e^{st}$ 代入运动方程, 可得

$$ms^2 + k = 0 \implies s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

- 通解: 表示成两个独立函数的任何线性叠加

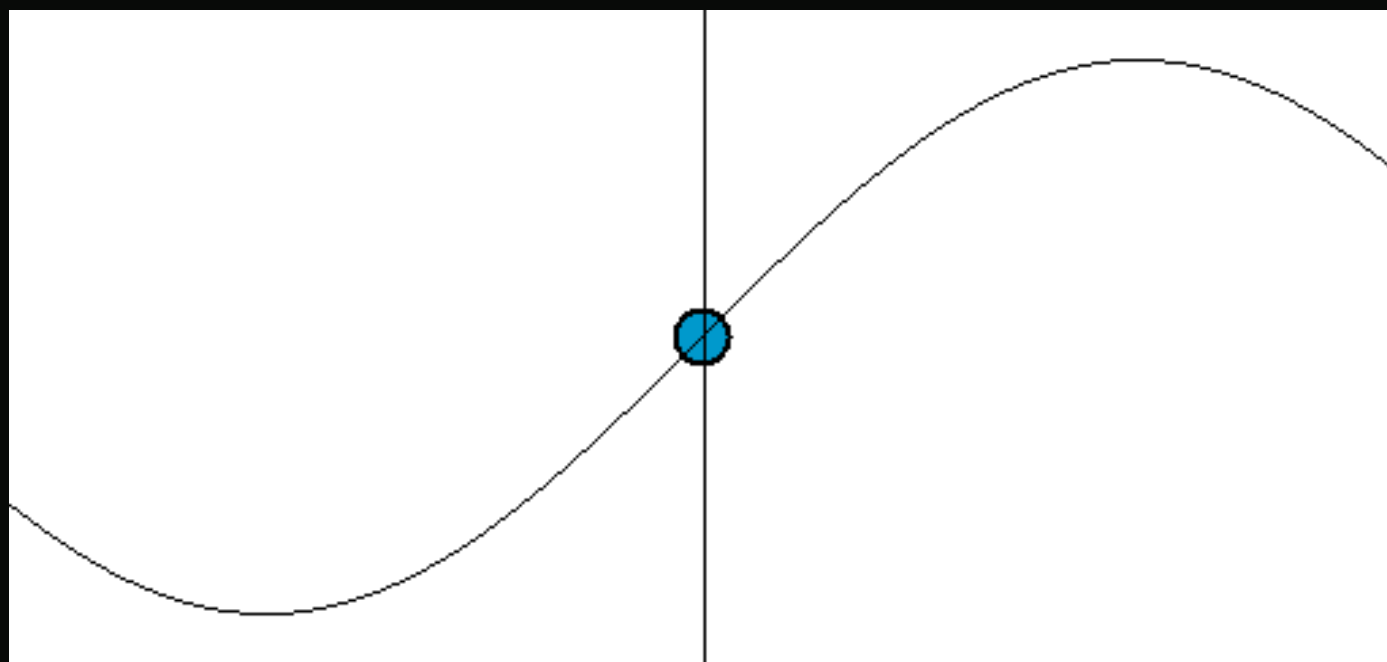
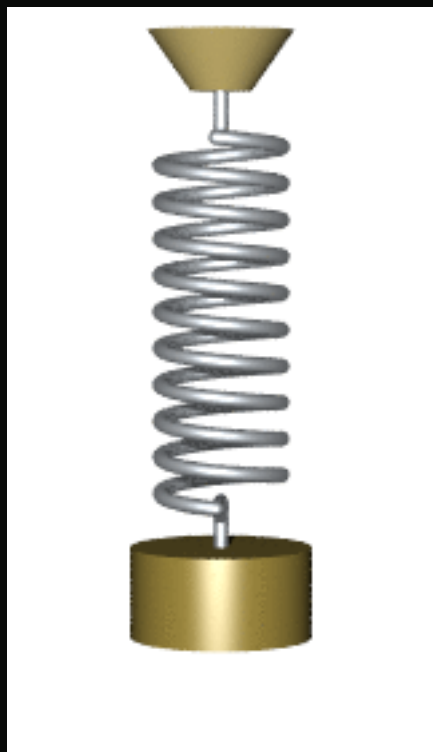
$$x = c_0 e^{i\omega t} + c_1 e^{-i\omega t}$$

- 需要的是实数解: $x = c_0 \cos(\omega t) + c_1 \sin(\omega t)$
- 周期性问题用复数表示比较方便。如果是实数解, 只考虑正频部分 $e^{i\omega t}$ 即可.

$$x(t) = \underbrace{|a| e^{i\phi}}_{\text{复振幅 } a} e^{i\omega t} \xrightarrow{\text{取实部}} x(t) = |a| \cos(\omega t + \phi)$$

- 复表示下两个由初始条件决定的常数为 $|a|$ 和 ϕ .

简谐振子运动图像



受迫振子

受迫振子

- 时变外力场下质点的振动

$$L = T - V - V_e$$

$$V_e(x, t) = V_e(0, t) + x \frac{\partial U_e(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t)$$

其中 $F(t) = -\frac{\partial U_e(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$.

运动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

- 非齐次方程的通解可以表示为一个特解加上齐次方程的通解

- 周期性驱动

$$F(t) = f \cos(\Omega t + \beta) \xrightarrow{\text{复数化}} f e^{i\beta} e^{i\Omega t}$$

的特解试探: $x = b e^{i\Omega t}$ 代入可得

$$\begin{aligned} m(-\Omega^2 + \omega^2) b e^{i\Omega t} &= f e^{i\beta} e^{i\Omega t} \\ \Rightarrow b &= \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} e^{i\beta}. \end{aligned}$$

- 通解的复数表示为

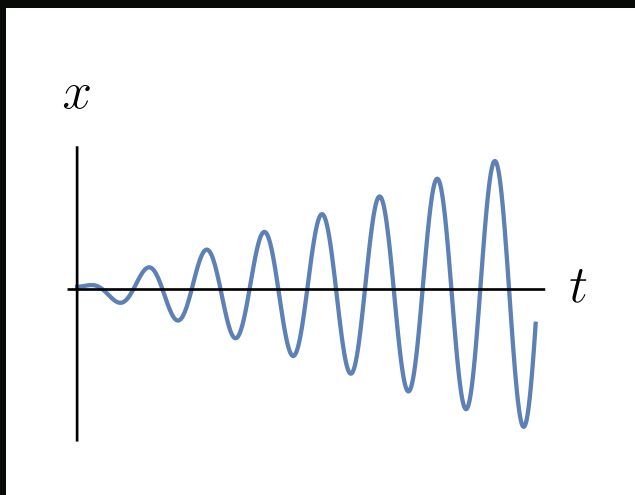
$$x(t) = a e^{i\omega t} + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} e^{i\beta + i\Omega t}$$

- 问题: 上述通解表示什么含义?

当 $\Omega = \omega$ 时, 上述特解不适用。重选试探解 $x = bte^{i\omega t}$ 代入可得

$$b = \frac{fe^{i\beta}}{2m\omega i} \Rightarrow \text{复数表示 } x(t) = \frac{-ift}{2m\omega} e^{i\omega t}$$
$$\Rightarrow \text{取实数 } x(t) = \frac{ft}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta)$$

该特解（共振情况）的示意图:



如何从非共振的情况过渡到共振情况？

• $\Omega \neq \omega$ 时

$$x(t) = ae^{i\omega t} + \frac{f}{m(\omega^2 - \Omega^2)} e^{i\beta + i\Omega t}$$

• $\Omega = \omega$ 时

$$x(t) = ae^{i\omega t} - \frac{ift}{2m\omega} e^{i\omega t + i\beta}$$

• 改写非共振情况下的特解为

$$x(t) = ae^{i\omega t} + \frac{fe^{i\beta}}{m(\omega^2 - \Omega^2)} (e^{i\Omega t} - e^{i\omega t})$$

• 取极限 $\Omega \rightarrow \omega$ 时，应用洛必达法则，第二项为

$$\frac{-ift}{2m\omega} e^{i\omega t + i\beta}$$

和共振情况下一样。

阻尼振子

阻尼振子

阻尼（damping）是指任何振动系统在振动中，由于外界作用（如流体阻力、摩擦力等）和/或系统本身固有的原因引起的振动幅度逐渐下降的特性，以及此一特性的量化表征。

——维基百科

- 该情况下运动过程已不再是纯力学过程，**不能将阻尼项直接写入拉格朗日量中。**
- 比如，已知摩擦力 $F_{\text{fr}} = -\alpha\dot{x}$ 下阻尼振子的运动方程为

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

可以在欧拉-拉格朗日方程中广义力的地方将耗散力加入（教材 1.4 节）。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_j}$$

其中 $R = \frac{1}{2}\alpha_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ 被称为**耗散函数**。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) \\ &= \dot{x}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \\ &= -\dot{x}_i \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = -2R\end{aligned}$$

阻尼振子的求解

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{其中 } \gamma := \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega_0 := \sqrt{k/m}$$

- 取试探解 $x = e^{\alpha t}$ 代入

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \implies \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- 根据 γ 与 ω_0 的大小关系, 分为三种情况

- 过阻尼: $\gamma > \omega_0$,

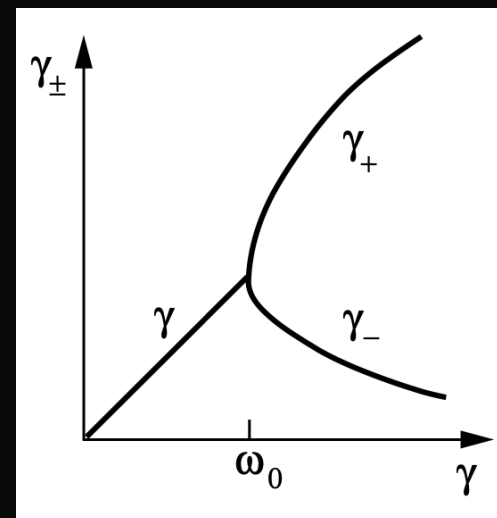
$$x(t) = c_0 e^{-\gamma_+ t} + c_1 e^{-\gamma_- t}$$

$$\text{其中 } \gamma_{\pm} := \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

- 小阻尼: $\gamma < \omega_0$,

$$x(t) = ce^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{其中 } \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- 临界阻尼: $\gamma = \omega_0$, 两个解简并, 需要再找一个解, 验证 $te^{-\omega_0 t}$ 也是解

$$x(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

第 4 章作业第 1、2、3、4 题,
下下周交