

理论力学

第 8 讲

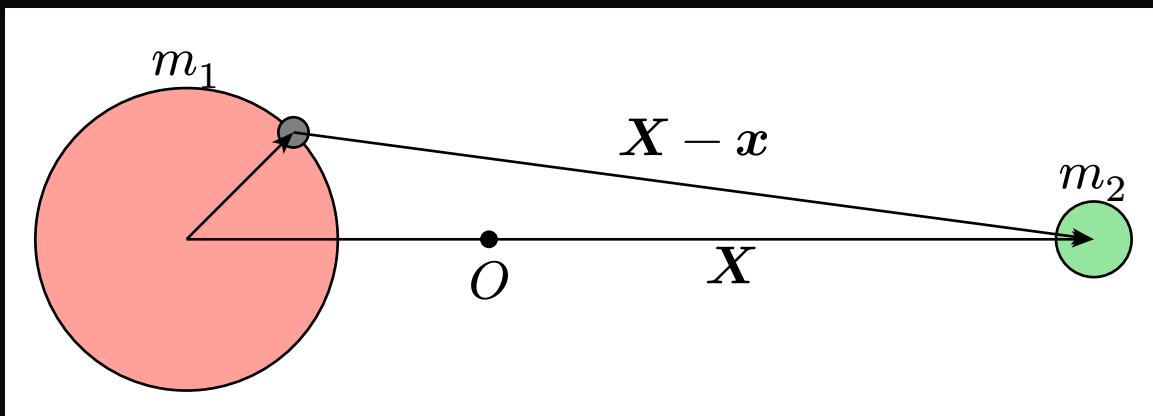
陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

- 潮汐现象 2
- 洛希极限 5
- 受限三体问题和拉格朗日点 7

潮汐现象



- 设在地球上，月球和地球的质量分别为 m_1 和 m_2
- 设在角速度为 Ω 转动参照系下，两个星球相对静止
- 地球表面的小液滴（质量设为 1）的势能为

$$\Phi(x) = -\frac{Gm_1}{|x|} - \frac{Gm_2}{|X - x|} - \underbrace{\frac{1}{2}\Omega^2(x_1 + x)^2}_{\text{离心势能}}$$

- 假设 $R = |X| \gg |x|$,

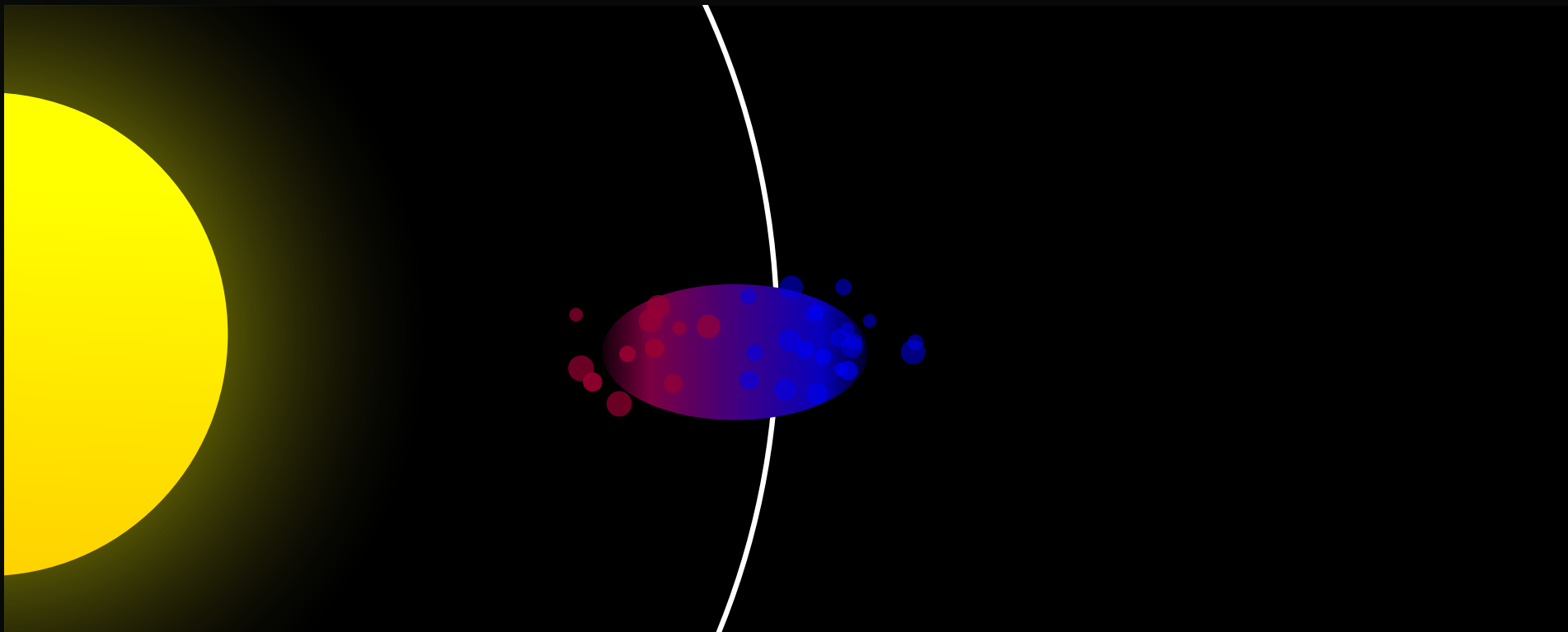
$$\frac{1}{|X - x|} \approx \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\hat{X} \cdot x}{R} - \frac{x^2}{2R^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{X} \cdot x}{R} \right)^2 \right]$$

- 势能的近似

$$\Phi(x) \approx -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{R} - \frac{1}{2}\Omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 x_1^2 + \frac{Gm_2 x^2}{2R^3} - \underbrace{\frac{3}{2} \frac{Gm_2}{R} \left(\frac{\hat{X} \cdot x}{R} \right)^2}_{\text{和 } x \text{ 的方向有关}}$$

洛希极限

洛希极限



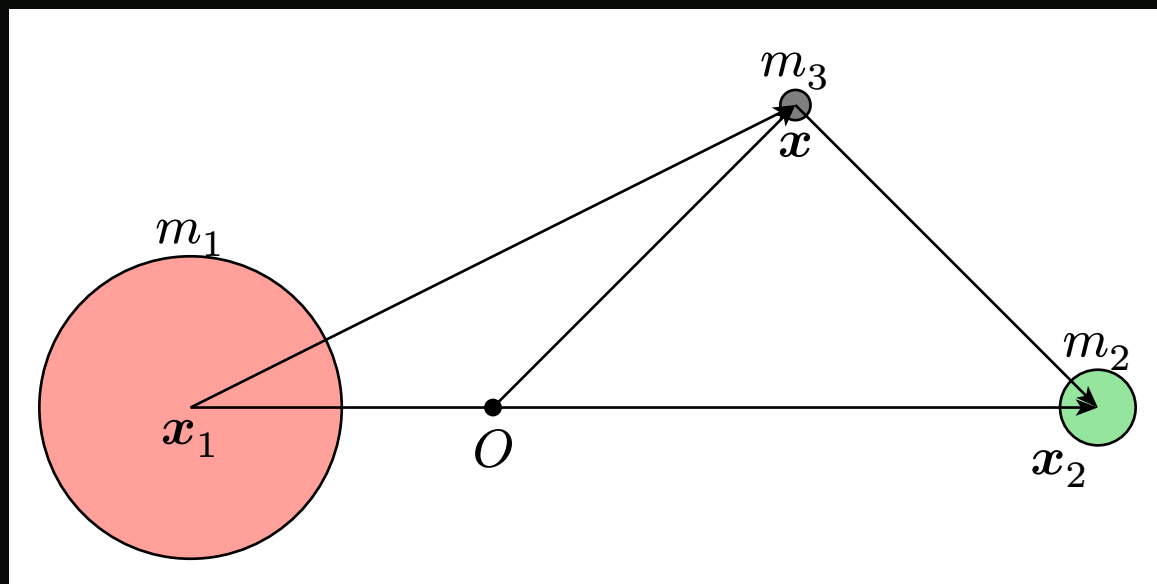
- 视频 1 <https://www.bilibili.com/video/BV1Ts4y1s79H/>
- 视频 2 <https://www.bilibili.com/video/BV1fD4y1A7mT/>

受限三体问题和拉格朗日点

受限三体问题

- 设三个物体的质量分别为 m_1 、 m_2 和 m
- 一般的三体问题无法解析求解
- 受限三体问题是指其中一个物体的质量远小于另外两个物体的质量，即 $m_1, m_2 \gg m$
- 小质量物体对大质量物体的影响可以忽略，两个大质量天体构成一个两体问题，
- 小质量物体在两个大质量物体的引力场中运动
- 太阳系中各行星轨道接近于圆轨道

受限三体问题



$$x_1 = (-r_1, 0), \quad x_2 = (r_2, 0), \quad R = r_1 + r_2$$

- 考虑两体的圆轨道, 圆轨道的特殊性要求径向 $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial R} = 0$, $V_{\text{eff}} = -\frac{Gm}{R} - \frac{J^2}{2mR^2}$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$$

- 在两体圆轨道情况下，在均匀旋转的非惯性系中它们保持静止

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_3(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2 - V(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{2}m_3\dot{\boldsymbol{x}}^2 - m_3\dot{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) - V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

- 有效势能

$$V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}m_3\Omega^2 x^2 + V(\boldsymbol{x}), \quad V(\boldsymbol{x}) = -\frac{Gm_1m_3}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}|} - \frac{Gm_2m_3}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}|}.$$

- 受限三体问题的一个重要应用是拉格朗日点
- 拉格朗日点是指在两个大质量物体的引力场中，第三个小质量物体可以保持相对静止的位置
- 拉格朗日点是以下方程的解 (x_L, y_L) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \Omega^2 x - \frac{Gm_1(x - x_1)}{|x_1 - x|^3} - \frac{Gm_2(x - x_2)}{|x_2 - x|^3} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \Omega^2 x - \frac{Gm_1(x+r_1)}{((x+r_1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(x-r_2)}{((x-r_2)^2+y^2)^{3/2}} = 0 \\ \Omega^2 y - \frac{Gm_1 y}{((x+r_1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2 y}{((x-r_2)^2+y^2)^{3/2}} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

- 两类拉格朗日点, $y_L = 0$ 和 $y_L \neq 0$

- $y_L = 0$ 时, 以下方程有三个解

$$\Omega^2 x - \frac{Gm_1}{(x + r_1)^2} - \frac{Gm_2}{(x - r_2)^2} = 0$$

- 将 $\Omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{R^3}$ 代入上式, 得

$$\frac{(m_1 + m_2)}{R^3} - \frac{m_1}{(x + r_1)^2} - \frac{m_2}{(x - r_2)^2} = 0$$

- $y_L \neq 0$ 时, y 方向的方程意味着

$$\Omega^2 = \frac{Gm_1}{\left((x+r_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_2}{\left((x-r_2)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

- 代入 x 方向的方程

$$\begin{aligned} \frac{m_1 x}{\left((x+r_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{\left((x-r_2)^2 + y^2\right)^{3/2}} &= \frac{m_1(x+r_1)}{\left((x+r_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{m_2(x-r_2)}{\left((x-r_2)^2 + y^2\right)^{3/2}} \\ \implies \frac{m_1 r_1}{\left((x+r_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} &= \frac{m_2 r_2}{\left((x-r_2)^2 + y^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

- 坐标系原点位于质心

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

- 因此

$$\frac{m_1 r_1}{\left((x + r_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{m_2 r_2}{\left((x - r_2)^2 + y^2\right)^{3/2}}$$
$$\implies (x + r_1)^2 = (x - r_2)^2$$

- 对于我们考虑的圆轨道来说, 还有特殊的条件

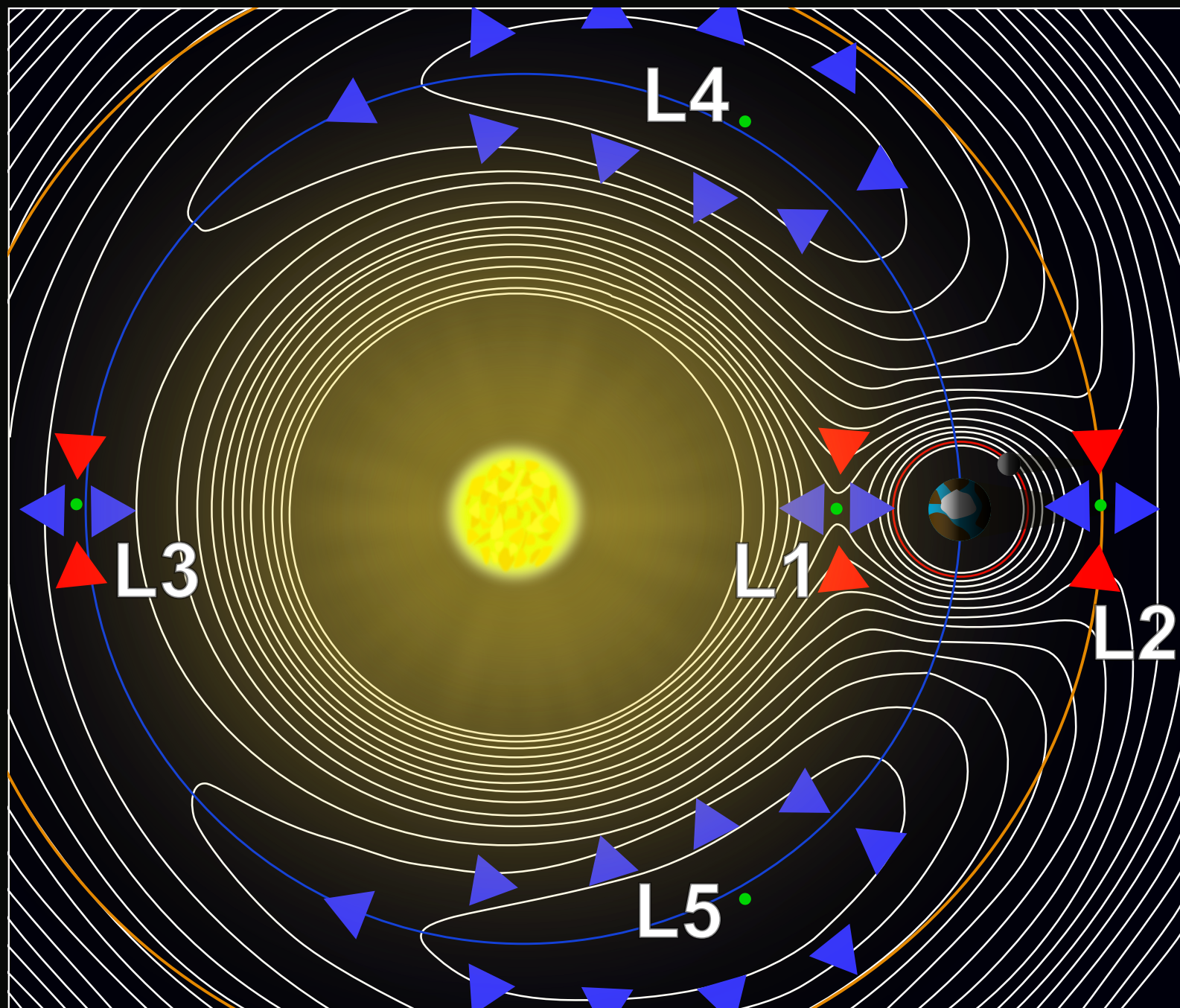
$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}$$

- 于是,

$$\left((x + r_1)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left((x - r_2)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = r_1 + r_2$$

- 拉格朗日点构成两个正三角形

拉格朗日点 $L_{4,5}$



拉格朗日点 $L_{4,5}$

- 拉格朗日点在天文学和航天动力学中有重要的应用
- 例如，拉格朗日点 L1 和 L2 是太阳和地球之间的平衡点，适合放置天文望远镜等设备
- 拉格朗日点 L4 和 L5 是两个大质量物体之间的平衡点，适合放置小型卫星等设备
- “The L1 point of the Earth-Sun system affords an uninterrupted view of the sun and is currently home to the Solar and Heliospheric Observatory Satellite **SOHO**.” —NASA
- “The L2 point of the Earth-Sun system was the home to the **WMAP (威尔金森微波各向异性探测器)** spacecraft, current home of **Planck (普朗克望远镜)** and the **James Webb Space Telescope (詹姆斯·韦伯空间望远镜)**. L2 is ideal for astronomy because a spacecraft is close enough to readily communicate with Earth, can keep Sun, Earth and Moon behind the spacecraft for solar power and (with appropriate shielding) provides a clear view of deep space for our telescopes. ”

- “The L1 and L2 points are unstable on a time scale of approximately 23 days, which requires satellites orbiting these positions to undergo regular course and altitude corrections.”
- “NASA is unlikely to find any use for the L3 point since it remains hidden behind the Sun at all times. The idea of a hidden planet has been a popular topic in science fiction writing.”
- 由于 L4 和 L5 的自然稳定性，在行星系统的拉格朗日点上发现绕轨道运行的自然物体是常见的。位在这些点上的物体通常被称为“特洛伊天体”或“特洛伊小行星”。
- 例如，木星的特洛伊小行星群位于木星和太阳之间的 L4 和 L5 点上。它们是太阳系中最大的特洛伊小行星群之一，包含数千个小行星。

第三章作业第 3、5 题
(下周交)