理论力学

第 6 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

重点回顾

重点回顾

- 和时空相关的对称性及其守恒律
- 连续对称性和守恒律： 诺特定律

力学相似性: 尺度变化

和对称性有所不同，力学相似性是指拉格朗日量乘以任何常数不会改变运动方程。

可以利用这一点，无需求解有关运动方程就可以得到有关运动性质的结论。

- 空间和时间做不同的尺度变换:

$$\boldsymbol{x}_i \to \lambda_1 \boldsymbol{x}_i, \quad t \to \lambda_2 t \quad \Rightarrow v_i \to \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_i \quad \Rightarrow T \to \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 T$$

- 假设势能是坐标的齐次函数，满足

$$U(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \lambda_1 \boldsymbol{x}_2, ..., \lambda_1 \boldsymbol{x}_N) = \lambda_1^k U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N)$$

可以选择 λ_2，让动能和势能有同样的标度因子，即:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \lambda_1^k \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}}.$$

两个相似轨道上的特征时间和特征尺度满足

$$\lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \implies \frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

著名例子: 开普勒第三定律: 各个行星绕太阳公转周期的平方及其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

对应 $k = -1$.

位力定理

位力定理（英语：Virial theorem，又称维里定理、均功定理）是力学中描述稳定的多自由度孤立体系的总动能和总势能时间平均之间的数学关系。

如果力学体系在有限空间中运动，势能是坐标的齐次函数，则动能和势能的时间平均值之间存在非常简单的关系。

函数 $f(t)$ 的时间平均:

$$\langle f \rangle \equiv \lim_{\{\tau \to \infty\}} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$$

数学工具：如果函数 $f(t)$ 是某个有界函数 $F(t)$ 对时间的全导数，则 $f(t)$ 的时间平均等于零，因为

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau \to \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

位力定理

$$2T = \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{x}_i - \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \boldsymbol{x}_i$$

- 对于经典系统: $L = T - U$ 来说, $\dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}$, 于是

$$2T = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{x}_i}_{\text{假设有界}} + \sum_i \boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}$$

$$\Longrightarrow 2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i} \right\rangle$$

- 如果 U 是 $\boldsymbol{x}_i$ 的 k 次齐次函数, 则有

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i} = kU$$

- 系统的动能平均和势能平均之间存在着简单的比例关系:

$$2\langle T \rangle = k\langle U \rangle.$$

非惯性系的力学

- 常见的非惯性系：直线加速系和旋转系，
- 场景：电梯，转盘

非惯性系的力学是指在非惯性系中研究物体的运动规律。

- 将非惯性参照系的运动分解为平动 $\boldsymbol{V}(t)$ 和转动 $\boldsymbol{\Omega}(t)$
- 在 K_0 惯性参照系中，参照系 K' 相对于 K_0 以速度 $\boldsymbol{V}(t)$ 平动

$$L_0 = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_0^2 - U$$

-
- 两个参照系中速度的变换关系

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}(t)$$

- 参照系 K' 中的拉格朗日量为

非惯性系的力学

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{V}(t)^2 + m\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{V}(t) - U$$

- 拉格朗日量可以相差一个时间全微分项（时间积分不依赖运动轨道）
- $\frac{1}{2}m\boldsymbol{V}(t)^2$ 不依赖于动力学变量，总是可以视作某个时间函数的全微分，因此可以去掉
- 第三项

$$m\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{V}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{V}(t)] - m\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{W}(t)$$

其中 $\boldsymbol{W}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}$ 是平动加速度

- 再次去掉第三项中的时间全微分项

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 - m\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{W}(t) - U$$

- 欧拉-拉格朗日方程

非惯性系的力学

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{x}'} = 0 \Longrightarrow m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = -m\boldsymbol{W}(t) - \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}'}$$

- 这就是在非惯性系中物体的运动方程， $-m\boldsymbol{W}(t)$ 为该情况下的“惯性力”。

旋转系

- K 系和K'原点重合， 相对于 K' 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转， $\boldsymbol{x}$ 是 K 系中的坐标， $\boldsymbol{v}$ 是 K 系中的速度。
- 与平动不同的是，此时的速度变换关系依赖于矢径（位置向量）
- 旋转系的速度变换关系

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}$$

- K' 系中的拉格朗日量为

$$L' = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}'^2 - m \boldsymbol{W}(t) \cdot \boldsymbol{x}' - U$$

- 参照系 K 中的拉格朗日量为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2 - m \boldsymbol{W}(t) \cdot \boldsymbol{x} - U \\ &= \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 + m \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2 - m \boldsymbol{W}(t) \cdot \boldsymbol{x} - U \end{aligned}$$

- 广义动量

旋转系

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}$$

- 广义力

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\boldsymbol{W}(t) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}$$

- 运动方程

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = &-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} - m\boldsymbol{W}(t) \\ &+m\left(\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right) \\ &+2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega} \\ &+m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned}$$

- 惯性力：非匀速平动、非匀速转动、科里奥利力、惯性离心力

第二章作业第 11 题

（下周交）