

理论力学

第四讲



陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

重点回顾 2

相对论性自由粒子的作用量 4

粒子与外场的相互作用 10

非相对论极限 18

重点回顾

- 坐标 4 矢量:

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

- 时空坐标变换是洛伦兹变换:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

- 时空间隔

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu$$

- 协变 4 矢量

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu$$

- 固有时:

$$d\tau = ds/c$$

- 闵可夫斯基度规:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- 推促/推进 Boost

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\beta = v/c$$

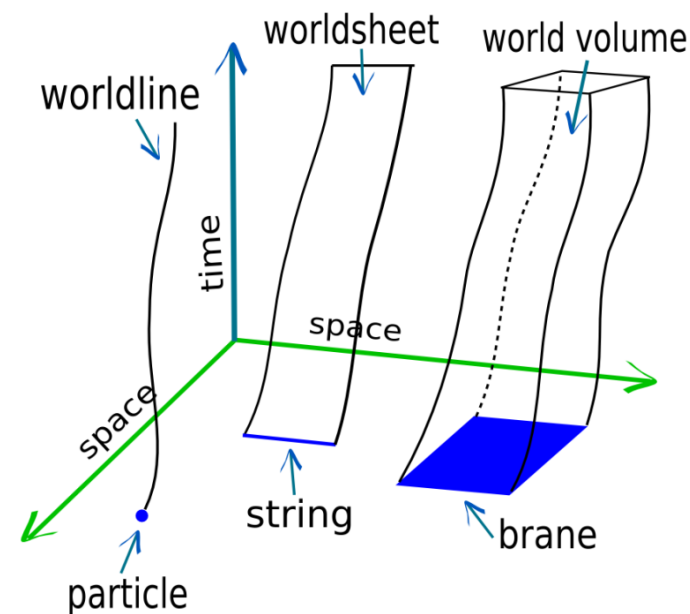
相对论性自由粒子的作用量

相对论性自由粒子的作用量

在相对论时空观中，一个粒子运动的轨迹被称为**世界线**。

相对论性自由粒子的作用量: 正比于自由粒子的世界线长度

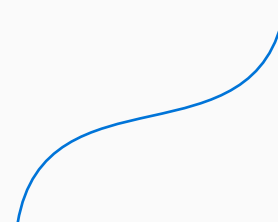
$$S = -mc \int_a^b ds$$



- 一般选用时间 t 来参数化世界线，即 $x(t)$ 或 $dx^\mu = (c dt, dx, dy, dz)$ 。
- 可以变换坐标系，比如相对粒子静止的坐标系，此时 $dx^\mu = (c d\tau, 0, 0, 0)$ 。
- 运动轨迹是真实的，坐标会变，但真实的运动轨迹不会变。

两种得到运动方程的方法:

- 写出拉格朗日量, 套用欧拉-拉格朗日方程
 - 用 t 来参数化运动轨迹
- 直接从最小作用量原理出发, 用变分法导出运动方程
 - 相当于用自身的长度来参数化 (自然坐标系)
 - 等价于用固有时 τ 来参数化运动轨迹



方法 1: 利用拉格朗日量

- 用 t 来参数化世界线

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2} = c dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$$

- 作用量

$$S = -mc \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dt$$

相对论性自由粒子的拉格朗日量: $L = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$.

- 广义动量正好是相对论性动量:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m \mathbf{v}.$$

- 欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

四维协变形式的的最小作用量原理变分法

- 另一种导出运动方程的方法：用世界线的长度来参数化世界线，
- 等价于用固有时 $d\tau$ 来参数化世界线
- 细节：对 ds 或 $d\tau$ 而不是 dt 积分

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= -mc \int_a^b \delta \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\ &= -mc \int_a^b \frac{g_{\mu\nu} \delta(dx^\mu dx^\nu)}{2 ds} = -mc \int_a^b \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu d\delta x^\nu}{ds} \\ &= -mc g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu \Big|_a^b + mc \int_a^b g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu ds \\ &= mc \int_a^b \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x_\mu ds \end{aligned}$$

- 自由粒子的运动方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \text{ for } \mu = 0, 1, 2, 3$$

- 利用固有时 $ds = c d\tau$, 运动方程为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \text{ for } \mu = 0, 1, 2, 3$$

- 利用固有时 τ , 4 速度和 4 动量为

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

- 固有时 τ 下的拉格朗日量 (4 速度的函数)

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad \Rightarrow \quad L = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}$$

粒子与外场的相互作用

粒子与标量场的相互作用

- 粒子和外场都需要满足洛伦兹协变性
- 场本身动力学的处理涉及到“场论”，因此只考虑相互作用项。
- 洛伦兹标量场: $\Phi(x)$

$$S = -mc \int e^{\Phi} ds$$

- 和自由粒子的情况类似，可以导出拉格朗日量，套用欧拉-拉格朗日方程。
- 或者利用最小作用量原理直接使用变分法导出运动方程。
- 为了运动方程具有洛伦兹协变性，需要考虑的是 4-矢量场
- 典型的例子是带电粒子在电磁场中的运动，受洛伦兹力 (高斯单位制)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

- 电磁四维势: $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$, Φ 和 $\mathbf{A}$ 都依赖于时空坐标
- 协变版本: $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$
- 总作用量:

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu(x) dx^\mu$$

- 相互作用项

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \\ &= -\frac{e}{c} \int A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt \\ &= -\frac{e}{c} \int [c\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}] dt \end{aligned}$$

- 拉格朗日量

$$L_{\text{int}} = -e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

$$L_{\text{free}} = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$$

- 粒子在电磁场中的广义动量 (正则动量, 将会在量子力学中出现)

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

- 欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \left(-e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) = -e \nabla \Phi + \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

- 利用电磁学方程、梯度和旋度的运算, 可知上述运动方程等价于电磁学中洛伦兹力下的带电粒子运动方程

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -e\nabla\Phi + \frac{e}{c}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}\right) \\ &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

- 将时空间隔的长度作为粒子运动轨迹的参数:

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{int}} &= -\frac{e}{c} \int \delta(A_\mu dx^\mu) = -\frac{e}{c} \int [(\delta A_\mu) dx^\mu + A_\mu \delta(dx^\mu)] \\&= -\frac{e}{c} \int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{ds} + \underbrace{A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{ds}}_{\text{分部积分去掉边界项}} \right] ds \\&= -\frac{e}{c} \int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{dA_\mu}{ds} \delta x^\mu \right] ds \\&= -\frac{e}{c} \int \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu \right] ds \\&= -\frac{e}{c} \int \underbrace{\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right)}_{F_{\mu\nu}} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu ds\end{aligned}$$

- 应用最小作用量原理

$$\delta S_{\text{free}} = mc \int_a^b \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\mu ds$$

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu ds$$

$$\delta S = 0 \iff mc \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

- 上述，得到了 4 维形式的运动方程；
- 该方程的形式极具对称性。

- 当有引力存在时，时空度规依赖于时空坐标， $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ 。
- 质量为 M 的天体，时空坐标用球坐标来表示

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

非相对论极限

- 低速:

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

- 自由项:

$$L_{\text{free}} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \underbrace{-mc^2}_{\text{常数项可忽略}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{非相对论性动能项}}$$

- 与标量场的相互作用项: $\Phi(x)$ 是无量纲的, 因此可取 $\Phi(x) = V(x, t)/(mc^2)$ 。

$$e^{\Phi} \approx 1 + \frac{V(x, t)}{mc^2}.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -mc \int e^{\Phi(x)} ds = -mc^2 \int \left(1 + \frac{V}{mc^2} + \dots\right) \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right) dt \\ &\approx -mc^2 + \int (T - V) dt \end{aligned}$$

电磁场中的带电粒子的非相对论极限

- 拉格朗日量

$$L_{\text{int}} = -e\Phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

$$L_{\text{free}} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- 只需要对自由项作非相对论近似即可。
- 对引力场也可以做非相对论近似，仍可以得到 $L = T - V$.
- 在非相对论的近似（低速，弱场）下， $L = T - V$ 普遍出现。

根据洛伦兹协变性写出相对论性的作用量后，有两种方法可得到运动方程：

- 写出拉格朗日量，套用欧拉-拉格朗日方程
- 直接应用最小作用量原理，用变分法导出运动方程

第二章作业第 5, 6, 7 题
(第 5 周交)