理论力学

第三讲: 狭义相对论时空观

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

回顾

回顾

- 最小作用量原理：由 $\delta S = 0$ 可导出欧拉-拉格朗日方程
- 欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- 如何知道系统的作用量?

作用量和对称性

作用量和对称性

- 如何知道系统的作用量?
- 利用对称性
- 最基本的对称性是时空本身的对称性

狭义相对性原理

- 从伽利略相对性原理到狭义相对性原理
- 相对论 = 狭义相对性原理 + 光速不变原理
- 惯性参考系之间的坐标变换必须是 Lorentz 变换
- 运动方程在 Lorentz 变换下需要保持不变
- 寻找在经典力学范围外，如何写出作用量的线索

目的：写出符合狭义相对性原理的作用量

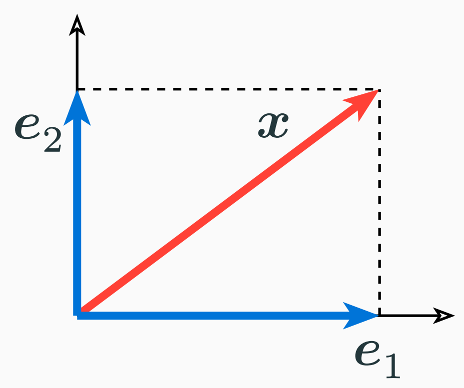
时空观

时空观

力学和时空观密切联系：运动规律是在时空背景上加以描述的。

- 质点组：所有质点在同一个时空中运动。它们的位置和时间处在同一个坐标系中。

坐标 (x_1, x_2, x_3) 是向量 $\boldsymbol{x}$ 在基矢上的分解系数，即 $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{3} x^j \boldsymbol{e}_j$



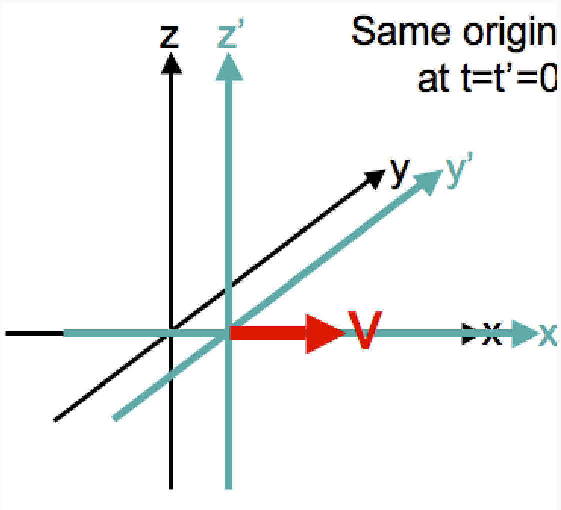
坐标系的变换通过基矢的变换来描述。

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{3} x^j \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x'^j \boldsymbol{e}'_j$$

产生坐标变换:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x'_1, x'_2, x'_3)$$

众所周知，伽利略坐标变换下，不同参照系下光速不可能不变。



伽利略坐标变换:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t\,.$$

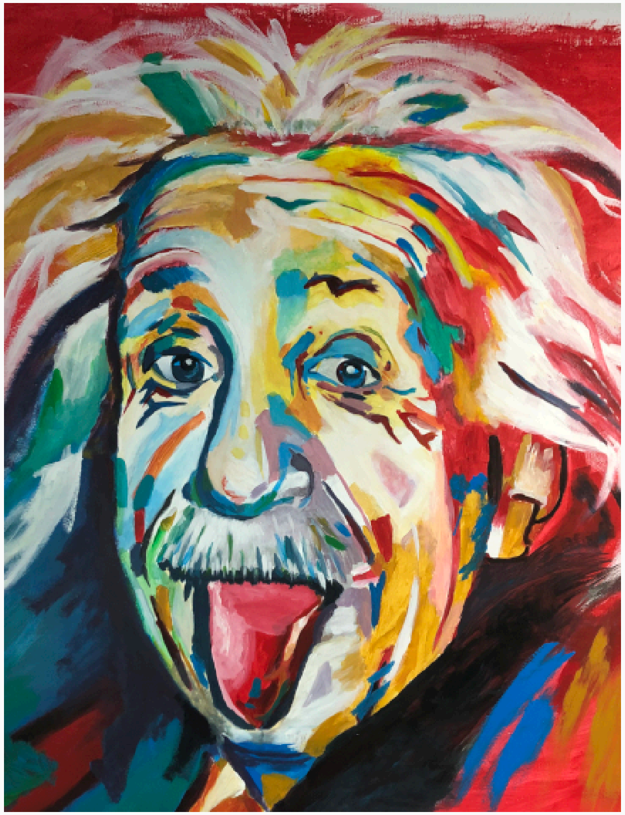
速度变换公式:

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$$

伽利略坐标变换的特点:

- 同时性：统一计时，空间各点的时间流逝 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$ 皆一样。
- 不同惯性参考系，各方向线元长度变化关系:

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z\,.$$



伊尔夏提墙绘

为了让光速不变原理和相对性原理相容，爱因斯坦认为惯性参考系之间的时空坐标变换不是伽利略变换，而应该是洛伦兹变换。

狭义相对论的提出背景...

- 迈克尔逊-莫雷实验
- 电动力学中的不对称性
- 以太不必要

变换中的不变量是研究变换的一个重要方法。例如:

- 转动、平移、镜像等操作下的线元长度
- 不可伸缩的绳子在不同形状下的长度
- 拓扑不变量

光速如何成为坐标变换中的不变量?

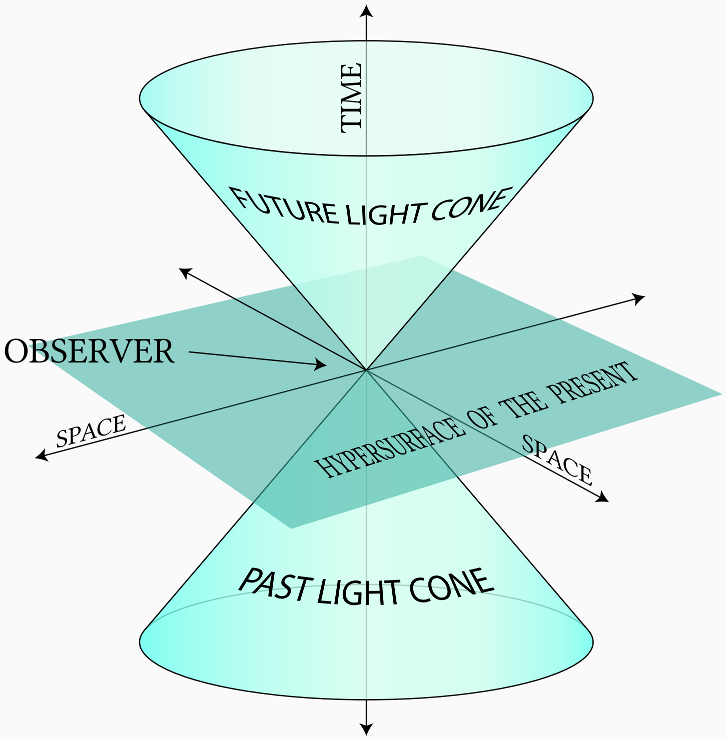
- 在 Δt 时间间隔中走过 $\Delta\ell \equiv \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} = c\Delta t.$
- 在另一个参考系中，光速不变要求 $\sqrt{(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2} = c\Delta t'$
- 因此，光速不变要求以下量是不变量:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

- Δs 被称为时空间隔

时空间隔的分类

- 对于光的轨迹 $x(t)$ 上的两点: $(\Delta s)^2 = 0$
- $(\Delta s)^2 > 0$: 类时（timelike）间隔
- $(\Delta s)^2 < 0$: 类空（spacelike）间隔



闵可夫斯基时空（Minkowski spacetime）

- 逆变 4 矢量：$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 是时空坐标
- 小线元：$\mathrm{d}x^\mu = (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) = (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$
- 无限小距离的普遍定义：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$$

- 时空间隔对应的度规被称为闵可夫斯基度规

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- 因为时空间隔可以为负，因此度规还有一种取法为 $-g_{\mu\nu}$
- 度规张量正比于单位矩阵的情况，对应欧式几何；其他为非欧几何

闵可夫斯基

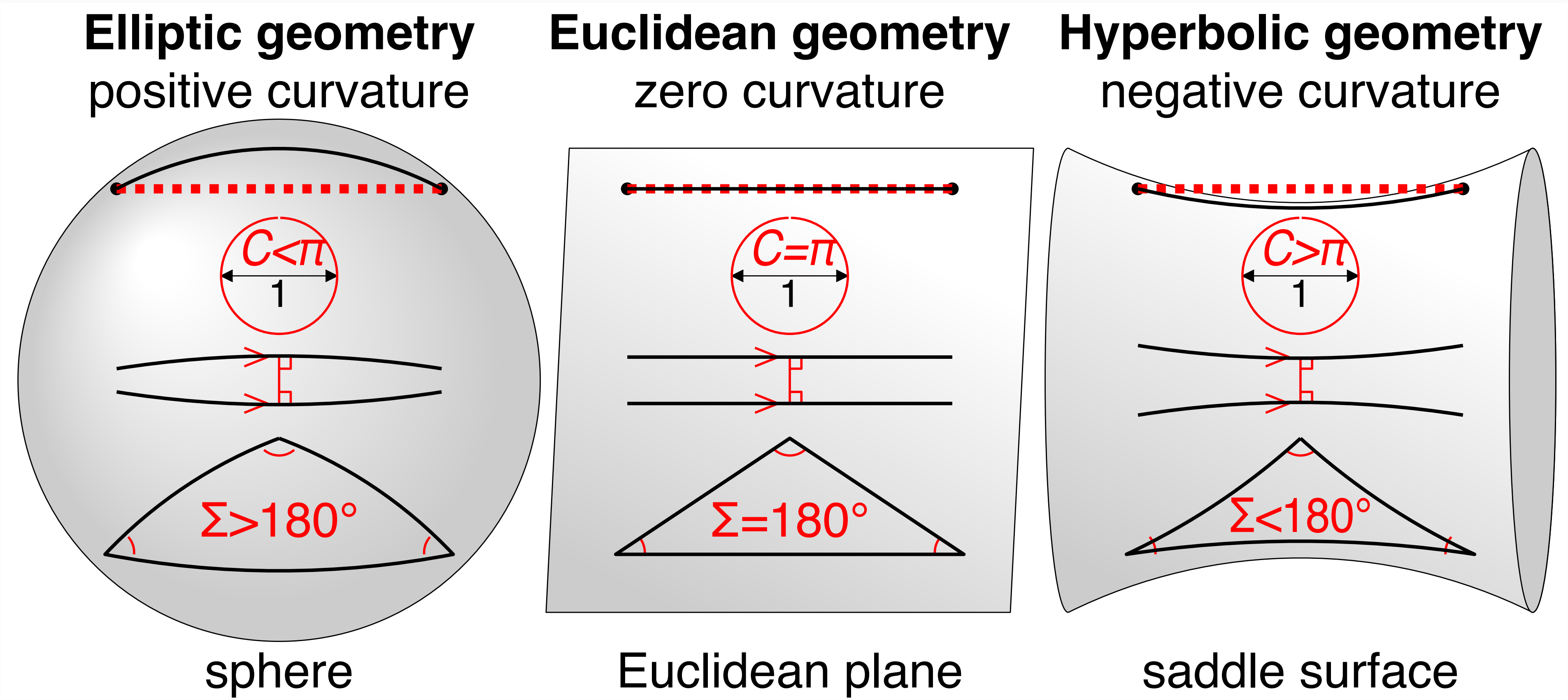
非欧几何简介

Nikolai Lobachevsky

Carl Friedrich Gauss

- 欧几里得几何学第五公理：给定一条直线，通过此直线外的任何一点，有且只有一条直线与之平行。
- 罗巴切夫斯基（Lobachevskij），几何学的哥白尼。改变第五公理，仍能得到自洽的几何学（双曲几何）。非欧几何
- 高斯：未发表

非欧几何简介



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_of_geometries.svg#/media/File:Comparison_of_geometries.svg

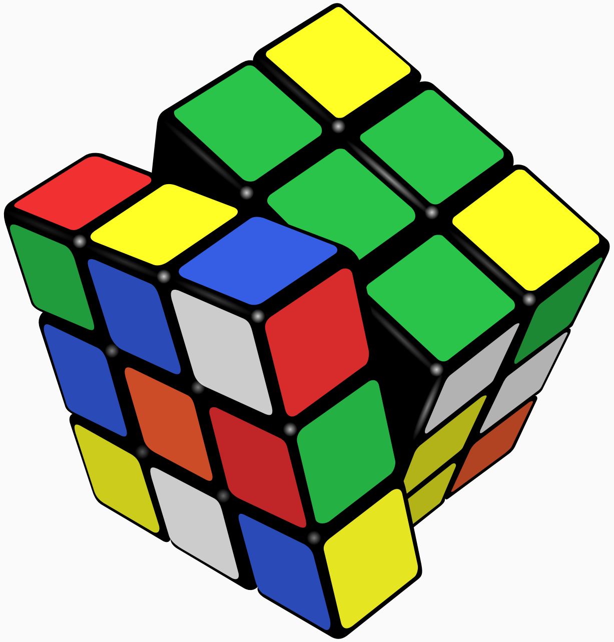
洛伦兹变换

变换群

以变换中的不变量来分类“变换”（或者说“操作”）

群的概念：满足以下条件的操作的集合

- 有一个恒等操作
- 操作的复合仍在该集合中
- 每一个操作都存在逆操作



连续变换群可以通过“微操作”（生成元）来理解。

- 坐标变换关系 $x \to x'$ 诱导的线元之间的变换关系必是线性的

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{d}x^{\nu}$$

- 时空间隔的变化

$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\big(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\big)\big(\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,\mathrm{d}x^{\beta}\big) = \big(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\big)\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$$

- 将上式与 $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}$ 对比并利用 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$，可得

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

- 矩阵乘法形式

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}x^{\mathsf{T}}\,\Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda\,\mathrm{d}x \Rightarrow \Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = g$$

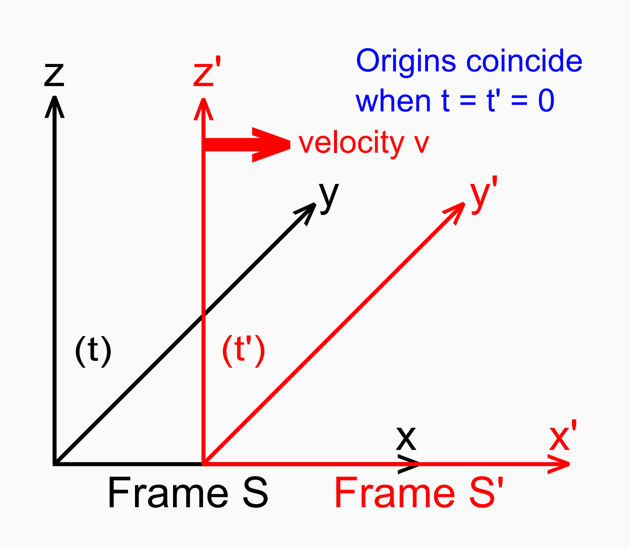
其中 Λ 的第 μ 行第 ν 列的矩阵元为 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$

满足以下条件的变换 Λ 构成一个群（Lorentz 群），能保证任意两个事件（时空点）的间隔不变:

$$\Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = g$$

- 群的生成元: 微操作（无限小变化）的分解
- 洛伦兹群的生成元: 3 个转动（rotation）+ 3 个推进（boost）
  - 转动是纯空间的变换
  - 推进是时间和空间之间的变换

- 考虑变换：从静止参考系到相对 x 方向匀速 V 的惯性参考系，质点坐标的变化



- 转动群可以分解成三个方向转动轴来分析
- Lorentz 群可以分解出三个方向的推进（Boost）

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

$$c^2t^2 - x^2 = (ct, x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

双曲函数

$$\cosh\varphi = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2, \quad \sinh\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2.$$

SO(1,1) 群和 SO(2)群的对比

	不变量	参数化表示
SO(2) 群	$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$	$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
SO(1,1) 群	$c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$	$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$

- 如何确定 φ 与参考系相对速度 V 之间的关系?
- 考虑特殊情况，′ 参考系为静止参考系，因此空间坐标没有变化.

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}\tau \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \Lambda(-\varphi)\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}\tau \\ 0 \end{pmatrix} = c\,\mathrm{d}\tau\begin{pmatrix} \cosh\varphi \\ \sinh\varphi \end{pmatrix}$$

两个参考系时空间隔的不变关系。静止参考系时间变化为 $\mathrm{d}\tau$，坐标没有变化

$$
\begin{aligned}
c^2\,\mathrm{d}\tau^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \\
\Rightarrow c\,\mathrm{d}\tau &= \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2} = c\,\mathrm{d}t\,\sqrt{1 - V^2/c^2} \\
\Rightarrow \mathrm{d}t &= \gamma\,\mathrm{d}\tau \,\text{with}\; \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\cosh\varphi &= \gamma \\
\sinh\varphi &= \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \beta\gamma
\end{aligned}
$$

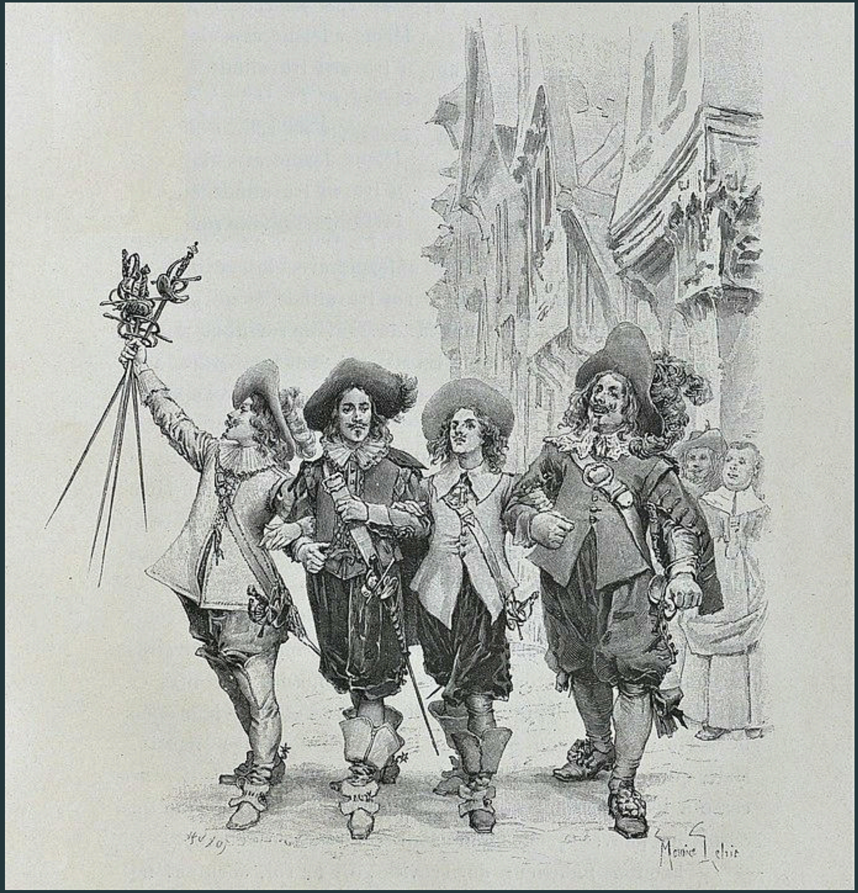
其中 $\beta \equiv \frac{V}{c}$

- 因此，x 方向推进的洛伦兹变换矩阵为

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

闵可夫斯基空间 4 矢量

《三个火枪手》， 实际是四个



知识点:

- 坐标逆变 4 矢量
- 坐标协变 4 矢量
- 固有时
- 4 动量及其不变量

四维坐标（Four-position）

- 定义（逆变）4 矢量

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

- 定义协变 4 矢量

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

- 同一个 4 矢量的逆变版本和协变版本的内积（“长度”）:

$$\begin{aligned} x_\mu x^\mu &= (ct, -x, -y, -z) \cdot (ct, x, y, z) \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

- 微分:

$$\mathrm{d}x^\mu = (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z), \quad \mathrm{d}x_\mu = (c\,\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y, -\mathrm{d}z)$$

- 事件间隔:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$$

逆变与协变 4 矢量的好处

- 在洛伦兹变换下，4 矢量发生变化，

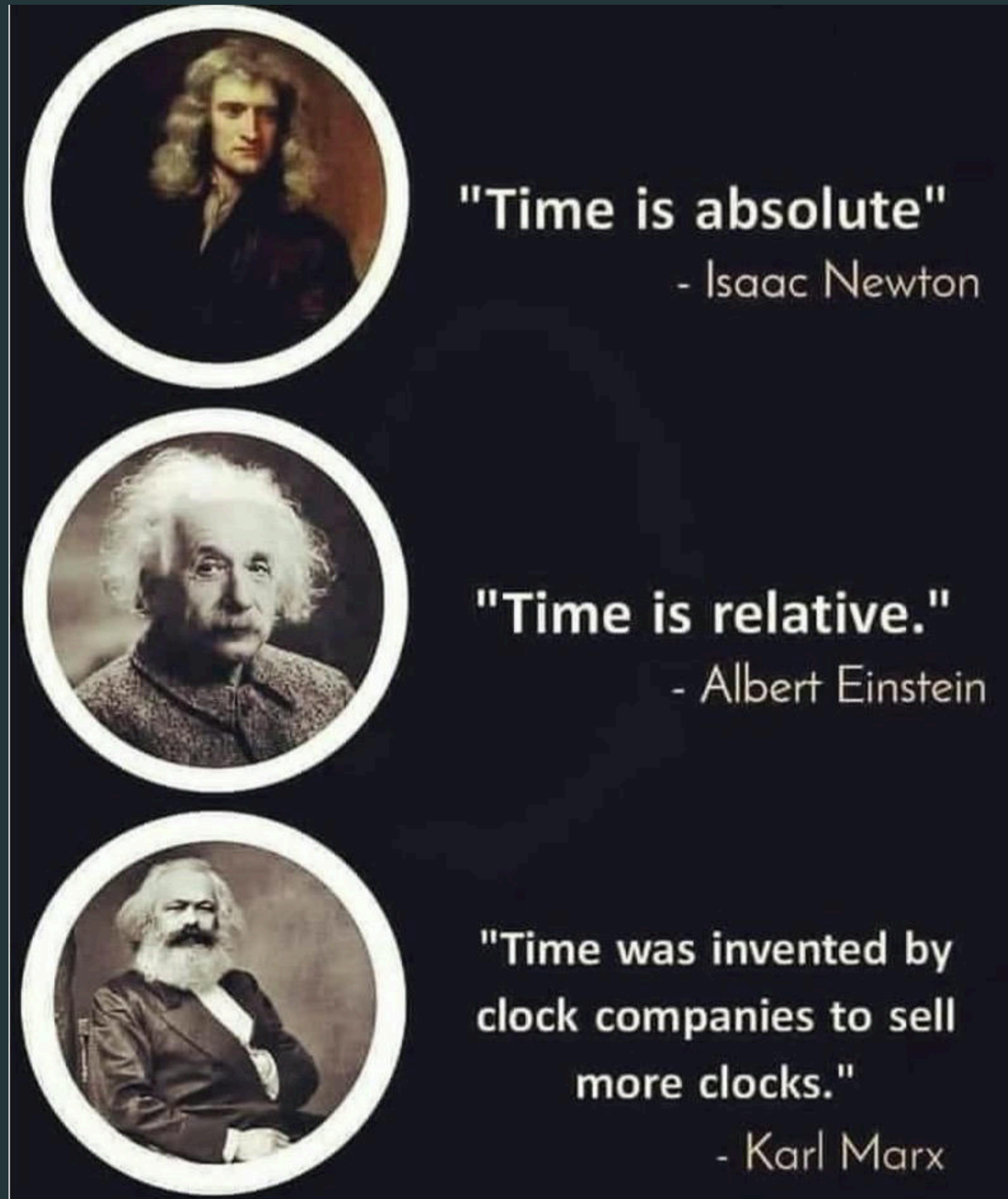
$$\mathrm{d}x^\mu \to \mathrm{d}x'^\mu, \quad \mathrm{d}x_\mu \to \mathrm{d}x'_\mu$$

- 众所周知，逆变 4 矢量和协变 4 矢量的内积在洛伦兹变换下不变.

$$\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x'_\mu\,\mathrm{d}x'^\mu \Leftrightarrow \mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$$

- 常规速度定义： $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，在坐标系变换时分子分母都要变，因此速度的变换关系比较复杂。

思考：如果速度定义式分母上的 "dt" 是洛伦兹不变量，那么速度的变换规律和时空坐标一样，都是洛伦兹变换，容易分析。


"Time is absolute"
- Isaac Newton
"Time is relative."
- Albert Einstein
"Time was invented by clock companies to sell more clocks."
- Karl Marx

- 线索：我们已经有了一个洛伦兹不变量：$\mathrm{d}s$，长度量纲

固有时/原时 (proper time):

$$\mathrm{d}\tau \equiv \frac{\mathrm{d}s}{c}$$

- $\mathrm{d}\tau$ 是洛伦兹标量 (Lorentz scalar)
- 物理意义：$\mathrm{d}\tau$ 是静止参考系内的时间变化。为什么?

四维速度 (four-velocity):

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$$

四维动量 (four-momentum)

四维动量（four-momentum）:

$$p^\mu \equiv m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = mc\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$$

$p_\mu p^\mu$ 为洛伦兹不变量:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = m^2c^2.$$

洛伦兹协变性

(Lorentz covariance)

洛伦兹标量 (Lorentz scalar)

从四维动量中，我们可以体会如何构造洛伦兹不变量的方法。

4-矢量不是一般的四维矢量，而是满足洛伦兹变换关系的矢量。

- 例如: $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$ 就不是 4-矢量，因为它在坐标变换（惯性参考系变换）下，

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mapsto \frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}t'}$$ 不是洛伦兹变换。

任何逆变矢量和协变矢量的内积是洛伦兹变换下的不变量——洛伦兹标量.

- 如: $p_\mu p^\mu$ 和 $x_\mu p^\mu$ 都是洛伦兹标量。

更一般的描述：从度规出发

度规不变 ⇒ 坐标变换的形式 ⇒ 具有协变性质的矢量 ⇒ 具有协变性质的的运动方程

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \\
&= (c\,\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y, -\mathrm{d}z)\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \\
&= (c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^\mu\,\underbrace{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu}_{\mathrm{d}x_\mu} \\
&= \mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\mu
\end{aligned}
$$

度规张量起到了将“协变 4-矢量”变成“逆变 4-矢量”的作用:

$$\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu$$

爱因斯坦能量-动量关系

- 根据四维动量来定义相对论性能量 E 和相对论性动量 $\boldsymbol{p}$

$$p^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$$

- 爱因斯坦能量-动量关系:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \iff E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$$

- 在静止参考系中， $\boldsymbol{p} = 0$, 因此有众所周知的质能关系:

$$\boxed{E = mc^2}$$

相对论性动量和传统动量的关系

相对论性动量（四维动量的后三个分量）为相对论性动量:

$$\boldsymbol{p} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}$$

- 需要知道 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\tau$ (设静止参考系为 $'$ 系) 之间的变换关系

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2 \Longleftrightarrow c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \gamma(v)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \quad \text{with} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

四维动量中的三分量和三维动量之间的关系: $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ 是否合理? 和广义动量的联系?

相对论性自由粒子的作用量

相对论性自由粒子的拉格朗日力学

- 作用量: 正比于自由粒子的世界线长度

$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s$$

- 将世界线写出关于时间 t 的积分

$$\int_a^b \mathrm{d}s = \int_{t_a}^{t_b}\sqrt{c^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b}\sqrt{c^2 - \boldsymbol{v}^2}\,\mathrm{d}t$$

- 拉格朗日量 $S = \int L\,\mathrm{d}t$:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}.$$

- 广义动量

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m\boldsymbol{v}.$$

第二章作业第 3，4 题

（第 5 周交）