理论力学

第二讲

陆晓铭

lxm@hdu.edu.cn

Outline

回顾

回顾

- 虚功原理

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^a \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

- 达朗贝尔原理

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^a - m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = 0$$

- 达朗贝尔原理在广义坐标下的形式

$$\sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

- 保守体系($\boldsymbol{F}_i^a = -\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_i}$)的欧拉-拉格朗日方程

$$\sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \text{ with } L(q, \dot{q}, t) = T - V$$

- 牛顿力学：用力来描述；vs 拉格朗日力学：用 $L(q, \dot{q}, t)$ 函数来描述

欧拉-拉格朗日方程和牛顿力学的等价性

例: 一个质点在势能场 $V(\boldsymbol{x})$ 中运动，笛卡尔坐标下动能可以写为 $T=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$

牛顿力学:	拉格朗日力学:
$m\dot{\boldsymbol{v}}=-\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$ $\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}}+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=0$	$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{v})-V(\boldsymbol{x}),$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}=0$
“力” + 矢量分析	拉氏函数（能量量纲） + 导数

拉格朗日力学的使用说明

对于约束问题，牛顿力学需要考虑约束力。而拉格朗日力学直接从广义坐标出发，比较方便。

如何写出系统的运动方程?

拉格朗日力学的使用说明

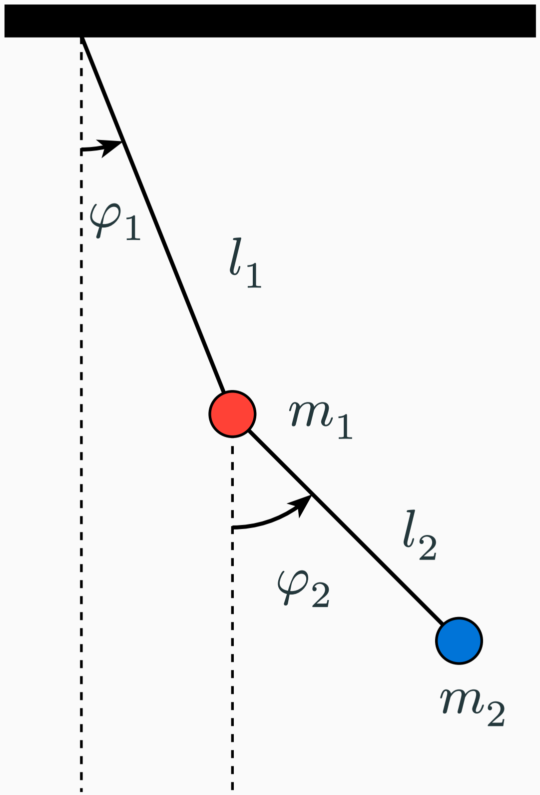
对于约束问题，牛顿力学需要考虑约束力。而拉格朗日力学直接从广义坐标出发，比较方便。

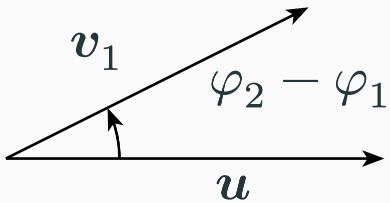
如何写出系统的运动方程?

程序清单，分两步:

1. 通过分析约束条件，选择广义坐标;
2. 通过坐标替换，写出拉格朗日量（广义坐标和广义速度的函数）;
3. 写出欧拉-拉格朗日方程。

小试身手





位形空间明显 2 个自由度，广义坐标 φ_1, φ_2

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T - V$$

$\boldsymbol{u}$ 是 m_2 相对于 m_1 的速度，$|\boldsymbol{u}| = l_2\ |\dot{\varphi}_2|$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)) \end{aligned}$$

$$V = -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$$

代入欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_j} = 0$$

力学原理

什么是力学原理?

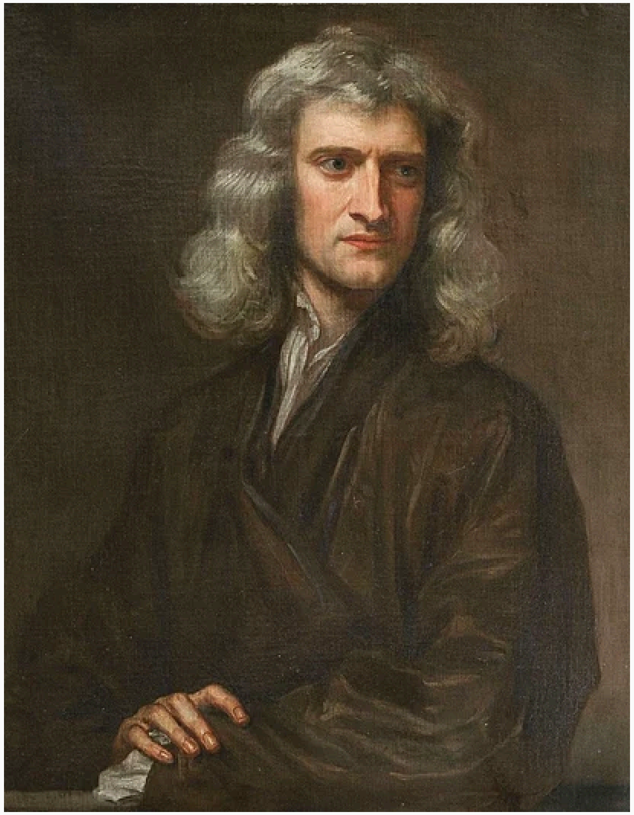
牛顿力学:	拉格朗日力学:
$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$
“力” + 矢量分析	拉氏函数（能量量纲） + 导数

在牛顿力学中，力是运动的原因.

如何理解拉式量能决定运动方程?

力学原理的重要性

- 如果只有 $F = ma$，而没有万有引力公式，不可能理解天体运动。
- 对于理解天体，运动规律、万有引力公式以及微积分三者缺一不可
- 在牛顿力学中，运动规律是普遍性的，而力是特殊性的
- 牛顿力学框架下，物理学理论的进展体现为对不同力的发现和理解。如万有引力、电磁力、摩擦力。



爱因斯坦在《物理学的进化》中指出，研究对象从力转向场是物理学进化的一个重要转折。

不同场（电磁场、引力场）演化的力学原理是什么?

拉格朗日力学

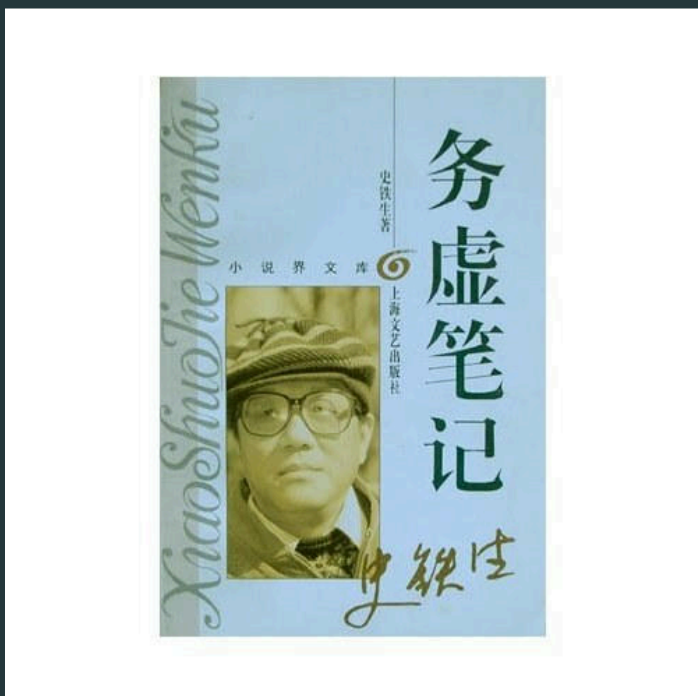
- 拉格朗日力学的好处不仅仅在于计算方便。
- 拉格朗日力学在现代物理学中的地位，源于最小作用量原理。
- 它为各类系统（包括场）提供了力学原理和运动规律的统一框架。
- 系统的特殊性通过作用量来体现。
- 作用量和对称性紧密相关，对称性决定了作用量的形式。

最小作用量原理：$\delta S = 0$。

- 最小作用量原理可以导出欧拉-拉格朗日方程
- 作用量 S 是连接两个位形之间可能路径的泛函。

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t$$

最小作用量原理

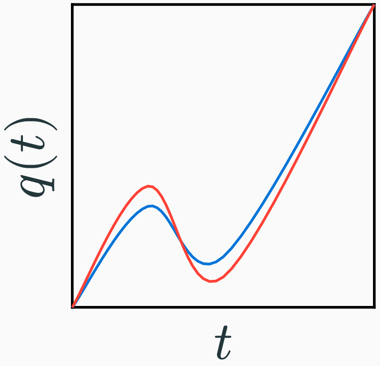


如果你站在童年的位置瞻望未来，你会说你前途未卜，你会说你前途无量；但要是你站在终点看你生命的轨迹，你看到的只有一条路，你就只能看到一条命定之路。不知道命运是什么，才知道什么是命运。

—— 史铁生《务虚笔记》

- 函数: $x \mapsto f(x)$, 从实数到实数的映射.
- 泛函: $q \mapsto f[q]$, $(q = q(t))$, “函数的函数”, 从函数到实数的映射.
  - 函数的积分:

$$q \mapsto \int_{t_1}^{t_2} q(t)\, \mathrm{d}t\,.$$



  - 曲线 $y = f(x)$ 的长度:

$$f(x) \mapsto \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

  - 函数在定点的值:

$$q(t) \mapsto q(t_0)$$

（多元）函数的微分	泛函的变分
$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$	$\delta S[q] = \int \mathrm{d}t \, \frac{\delta S}{\delta q(t)} \, \delta q(t)$
偏导数	泛函导数
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\frac{\delta S}{\delta q(t)}$

$\delta q(t)$ 表示在 t 时刻函数 $q(t)$ 的变化。

经典的变分问题：最速降线、悬垂线问题。

时间离散化下的对应关系

函数的全微分	$\mathrm{d}f =$	$\sum_i$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{d}x_i$
泛函的变分	$\delta S[q] =$	$\int$	$\mathrm{d}t\,\frac{\delta S}{\delta q(t)}$	$\delta q(t)$

对 $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t$ 时间离散化

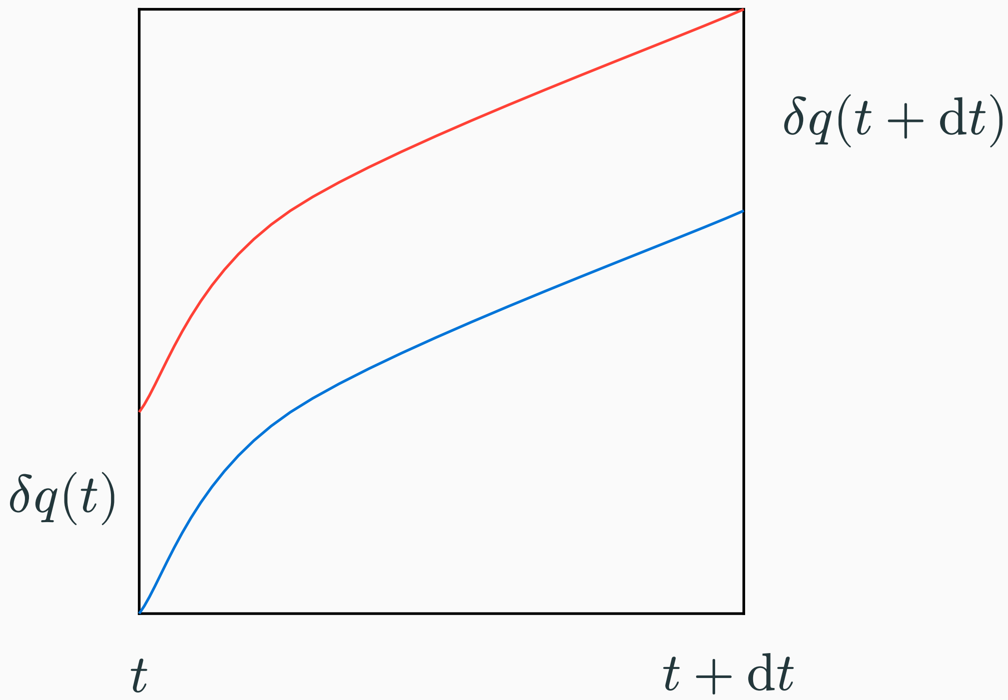
$$\mathrm{d}S(q_0, q_1, .., q_n) = \sum_k \Delta t_k L(q(t_k), \dot{q}(t_k), t_k) = \sum_k \Delta t_k \left[\frac{\partial L}{\partial q}\,\mathrm{d}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\mathrm{d}\dot{q}\right]\Bigg|_{t=t_k}$$

时间重新连续化

$$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right] \Longleftrightarrow \frac{\delta S}{\delta q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}$$

如何处理 $\delta\dot{q}(t)$？ $\delta\dot{q}(t)$ 并不独立于 $\delta q(t)$，它被 $\delta q(t)$ 的前后时刻衔接所决定。

泛函与变分



对于 $f(q(t),t)$ 形式函数的几种求导符号:

- $\frac{\partial f}{\partial q}$: 在每个 t 上，将 q 当作普通自变量来求偏导
- $\frac{\partial f}{\partial t}$: 把 q 当作独立于 t 的自变量，对 t 求偏导
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$: 在两个时刻 f 的变化，需要考虑 q 随时间变化

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial t}\Leftrightarrow \mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

全微分和变分

- 全微分，考虑一个函数全部参数的变化（包括时间的变化）
- 重要性质: $\mathrm{d}(\delta f) = \delta(\mathrm{d} f)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\delta f) &= \frac{\partial\, \delta f}{\partial q_j}\, \mathrm{d}q_j + \frac{\partial\, \delta f}{\partial t}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k}\, \delta q_k\, \mathrm{d}q_j + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_k}\, \delta q_k\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\, \mathrm{d}q_j + \frac{\partial f}{\partial t}\, \mathrm{d}t \right) \delta q_k \\
&= \delta(\mathrm{d} f)
\end{aligned}
$$

- 例如: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \delta q_j = \delta \dot{q}_j$ 表明 $\dot{q}(t)$ 的变分依赖于 $q(t)$ 和 $q(t + \mathrm{d}t)$

最小作用量原理导出运动方程

- 时间 t; 状态变量 q_i, $\dot{q}_i$
- 系统的动力学由拉格朗日量决定，它是广义坐标、广义速度和时间的函数。
- 作用量（action）是拉氏量对时间的定积分:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t\,.$$

最小作用量原理导出运动方程:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall \quad i.$$

例子：牛顿力学有势能下的粒子： $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$, 可得

$$m\ddot{q} = -\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q}$$

欧拉-拉格朗日方程的推导

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \forall j
$$

欧拉-拉格朗日方程的推导

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \forall j$$

- 定义广义动量和广义力:

$$p_j \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad F_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

- 可得“牛顿力学”形式

$$F_j = \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}$$

- $L = T - V = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 - V_i(x)\right)$，那么有 $m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i = -\boldsymbol{\nabla} V_i$.

- 最小作用量原理 $\delta S = 0$ 可以导出运动方程
- 作用量是拉格朗日量的积分
- 运动学方程可以由非常简洁的拉格朗日量导出
- 例如 Maxwell 方程组可以由以下拉格朗日量导出

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

"It is a remarkable (and computationsall very valuable) that this law can be obtained from a *single function*."
— R. Penrose, "The Road to Reality"

拉格朗日力学的好处

- 在经典力学问题中和牛顿力学等价
- 对经典力学问题的处理更加简洁优美
- 更好地联系对称性和守恒律
- 基本原理具有更广泛的适用范围，能应用到经典力学之外的物理领域

拉格朗日量的不唯一性

- 决定运动方程的是 $\delta S[q]$ 而不是 $S[q]$ 本身
- 因此，$S[q]$ 可以加上任何和 $q(t)$ 无关的项
- 对应地，L 可以加上任何函数的时间导数，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(L+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t+f\big|_{t=t_2}-f\big|_{t=t_1}$$

$$\delta\left(f\big|_{t=t_2}\right)=\delta\left(f\big|_{t=t_2}\right)=0$$

拉格朗日量的可加性

两个独立的子系统:

$$L = L_A + L_B$$

每一个独立部分的运动方程不可能包含另一部分相关的物理量。

每个拉格朗日量乘以常数，不影响运动方程。

对于自由粒子来说，可加性中相对的常数可归因于质量。

拉格朗日量的构造

如何从第一性原理来构造拉格朗日量?

从相对性原理和时空对称性，针对一个自由粒子来开始构造。

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$$

- 时空均匀性，L 不依赖于 $\boldsymbol{x}$ 和 t.
- 空间各向同性，L 不依赖于 $\boldsymbol{v}$ 的方向.
- 因此，可写为 $L(\boldsymbol{v}) = \tilde{L}(\boldsymbol{v}^2)$

伽利略相对性原理

- **伽利略相对性原理**，在另一个惯性参考系中，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{V}t$， $t' = t$，运动方程需要一样
- 根据最小作用量原理，不同惯性参考系下的拉格朗日量只能相差一项时空函数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ 对时间的全导数.
- 为寻线索，不妨设 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\varepsilon}$ 为无穷小量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{v}'^2 \approx \boldsymbol{v}^2 + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

可以看出，L 只能正比于 $\boldsymbol{v}^2$, 记 $L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$.

- 对于任意相对速度 $\boldsymbol{V}$ 进行检查

$$L(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}^2 + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2\right) = L(\boldsymbol{v}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2 t)}_{f(\boldsymbol{x},t)}.$$

第二章作业第 1，2 题

（第 3 周交）