

理论力学

第一讲

陆晓铭

lxm@hdu.edu.cn

课程考核与成绩评定方法

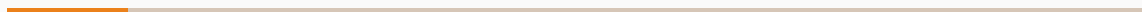
考核项目	评价环节	关联课程目标	评价依据与方法	占比
平时考核	课程思政实践	(1)	课程思政报告	5%
	平时作业	(2) (3)	以作业完成质量做评价依据	25%
期末考试	闭卷考试	(1) (2) (3)	考试成绩	70%
总评成绩		(1) (2) (3)	总评=课程思政实践 (5%) + 平时作业 (25%) + 期末考试 (70%)	100%

教材：刘川，《理论力学》，北京大学出版社

参考书：

- 高显，《经典力学》，科学出版社。更详细。
- 朗道，《力学》，高等教育出版社。经典著作。
- 王晓光，《理论力学及其专题分析》，科学出版社。专题分析。

入门



请一半同学简单介绍下自己:

请剩下的同学用下面的句式介绍自己:

“我是这个教室里最_____的人”。

第二种介绍方法采用了“极值”的视角, 它有什么好处?

- 描述上一般比较简洁
- 关注对象的特殊性

牛顿力学怎么了?

为什么需要其他形式的力学?

牛顿力学怎么了？

为什么需要其他形式的力学？

- 历史上为什么需要？
- 现在为什么需要？

类似的思考：计算机，因特网，量子计算机



*May The Force
Be With You*

- 牛顿力学基于受力分析，可视为矢量力学。通过描述质点每个时刻的受力，运用

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

原则上可以求得每个质点的运动轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 。

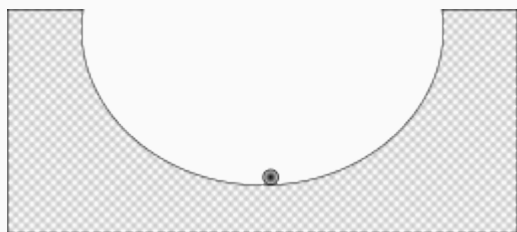
- 在牛顿力学中，还定义了一些力学量，如质点的动能、动量和角动量：

$$T \equiv \frac{1}{2}mv^2, \quad \mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p}.$$

这些力学量在牛顿力学中都可视为关于位置 $\mathbf{x}$ 和速度 $\mathbf{v}$ 的函数，而质量 m 是常数。

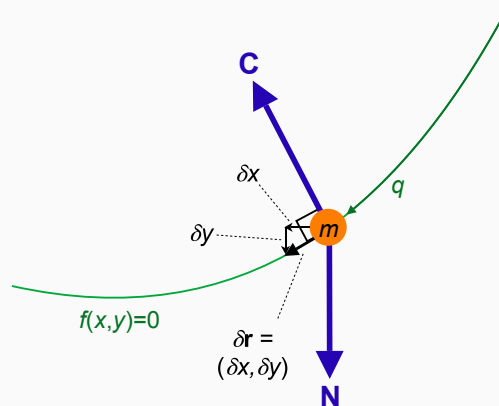
处理约束问题时，牛顿力学有点“钝”！

牛顿力学的问题



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\text{约束: } f(\mathbf{x}) = 0$$



- 牛顿力学需要指明所有的力，包括约束力。
- 约束力的作用是将位移向量约束在特定条件内。
- 约束力本身依赖于位置和主动力，处理起来比较棘手。

约束与广义坐标

为了求解约束问题，历史上发展了一系列利用“变分”的处理方法。

考虑在三维欧式空间中由 N 个质点组成的系统（质点组）：

- 符号：质点 i 的位置 x_i ，总的分量数为 $3N$ 。
- **位形空间**：由 $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 组成的空间，维数为 $3N$ 。
- **状态空间**：由 $(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N)$ 组成的空间，维数为 $6N$ 。
系统的动力学是状态的时间演化。
- **完整约束**： $f_m(x, t) = 0$ 是对位形空间的直接限制。
- 还可以有其他约束，如速度约束、不等式形式的约束等。

广义坐标和广义速度

- 假设存在 k 个完整约束，实际位形空间的维数为 $3N - k$ 。
- 为了消除冗余，引入 $3N - k$ 个相互独立的广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$
 - 例：平面单摆，一个角度就可描述允许的位形。
- 状态（位置矢量和速度）可以用广义坐标和广义速度来表示。

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

在约束问题中棘手的约束力问题，可以通过“虚位移”来处理。约束力和虚位移之间往往存在着很强的联系。

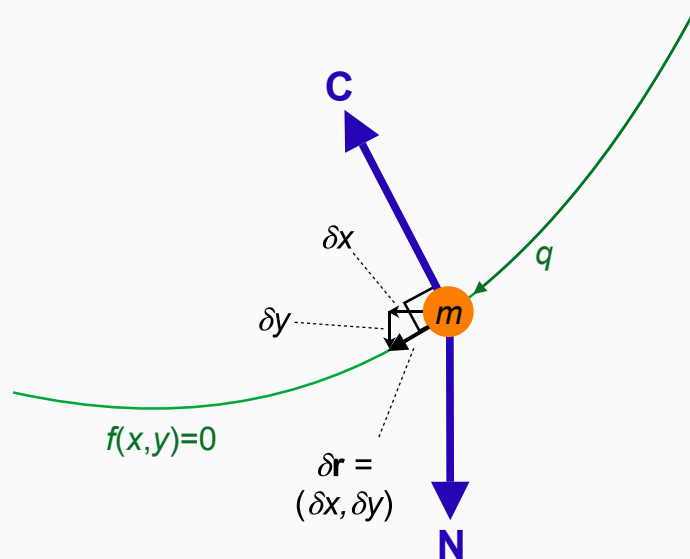
- **虚位移**是指系统在受到约束的情况下，位置矢量的微小变化。

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$\Downarrow$

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

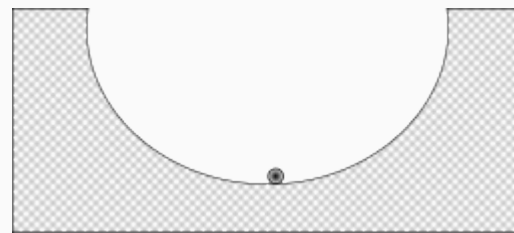
- 无约束情况下 $\delta \mathbf{x}$ 的自由度为 $3N$ ，由约束情况下为 $3N - k$ 。
- 虚位移的自由度为 $3N - k$ ，与广义坐标的自由度相同。



约束力的特殊性? 如何利用特殊性?

考虑一个处于力学平衡, 有约束的单质点。

约束力和虚位移垂直。



考虑一个处于力学平衡, 有约束的力学体系。

- 质点 i 受力 $F_i = F_i^a + F_i^c$, 其中 F_i^a 表示主动力, F_i^c 表示约束力。
- **虚功**: 力在虚位移下的做功, 总虚功为 $\sum_i F_i \cdot \delta x_i$
- **理想约束**: 如果系统所有质点所受约束力的总虚功为零, 则称该系统的约束为理想约束。

(静力学) 虚功原理

- 静力学平衡条件: $F_i = 0$.
- 从静力学平衡条件出发, 结合理想约束的条件, 可以得到虚功原理:

$$F_i = 0 \Rightarrow \sum_i F_i \cdot \delta x_i = 0$$

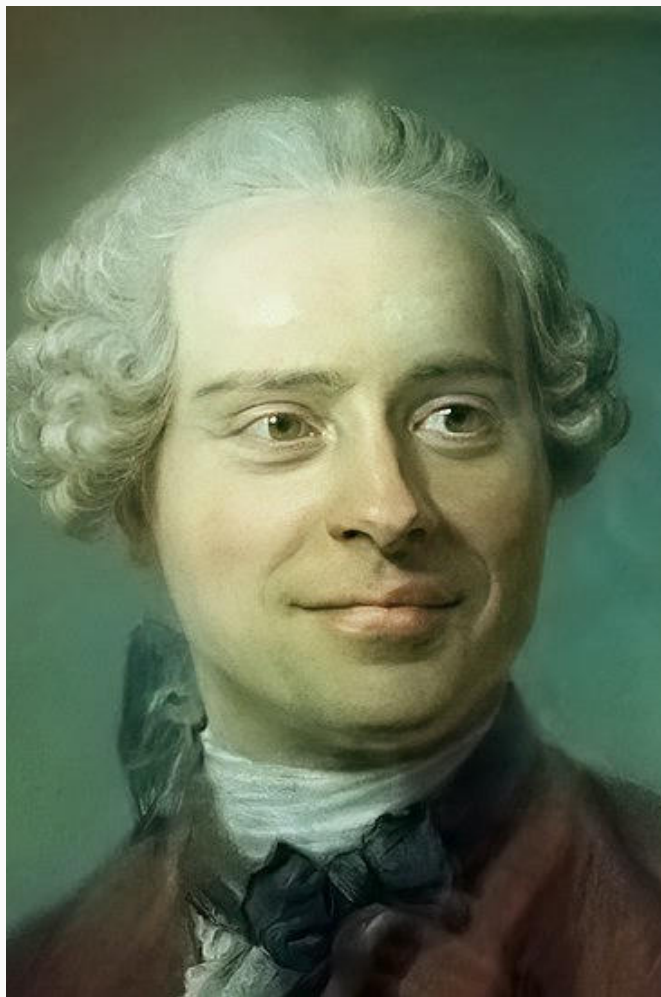
$$\Downarrow \sum_i F_i^c \cdot \delta x_i = 0$$

虚功原理:

$$\sum_i F_i^a \cdot \delta x_i = 0$$

虚功原理:

在理想约束下, 一个物理系统处于静态平衡, 当且仅当所有主动力的虚功之总和为零。



达朗贝尔 (d'Alembert)

- 达朗贝尔原理是虚功原理的推广，适用于动力学系统。
- 惯性力: $-m_i \dot{v}_i$
- 加上惯性力后，系统达到力学平衡

$$F_i - m \dot{v}_i = 0$$

- 对于理想约束下的系统，达朗贝尔原理可以写为

$$\sum_i (F_i^a - m_i \dot{v}_i) \cdot \delta x_i = 0$$

达朗贝尔原理:

理想约束系统所受主动力和惯性力的虚功之和为零。

广义坐标下的虚功定理

虚功可以通过广义坐标及作用其上的广义力来表示

$$\sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$

$\Downarrow$

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$\Downarrow$

$$\sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

$\Downarrow$

$$Q_j = 0 \quad \forall \quad j$$

- 虚位移变分（在同一时刻）：

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_j \frac{d\mathbf{x}_i}{dq_j} \delta q_j$$

- 广义力

$$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$$

- 好处：消除了坐标冗余和约束力。
- 注意：不同 $\delta \mathbf{x}_i$ 是不独立的，但广义坐标是独立的。因此有

$$Q_j = 0 \quad \forall \quad j$$

对比静态平衡的充要条件

原始	虚功定理	广义坐标下的虚功定理
$\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^c = 0 \quad \forall \quad i$	$\sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad \forall \quad i$	$Q_j = 0 \quad \forall \quad j$

广义坐标下的达朗贝尔原理

- 动力学系统的达朗贝尔原理用广义坐标表示时还需要处理惯性力。

$$\begin{aligned} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i &= \sum_j m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned}$$

- 用广义坐标和广义速度来表示速度 $\mathbf{v}_i$, 有

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}.$$

利用 $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$ 和 $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$, 有

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

广义坐标下的达朗贝尔原理

- 问题: 为什么 $\frac{d}{dt}$ 和 $\frac{\partial}{\partial q_j}$ 可以交换顺序? (稍后解释)
- 注意: 换到广义坐标和广义速度后, v_i 是可能依赖于广义坐标的, 如角度和切向速度。
- 此时, 动能也变成了广义坐标、广义速度和时间的函数: $T = T(q, \dot{q}, t)$, 多个广义坐标自动扩充

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i &= \sum_{i,j} \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0\end{aligned}$$

广义坐标下的达朗贝尔原理

达朗贝尔原理

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^a - m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

其中 $Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$ 为广义力的定义.

- 假设 $\mathbf{F}_i^a = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}$, V 只依赖于坐标, 那么有

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \text{ with } L = T - V$$

- 能量观

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \text{ with } L = T - V$$

只用一个 L 函数就能描述系统的动力学。

“大道至简”

第一章作业

(第 3 周交)