理论力学

第 15 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

哈密顿-雅可比方程 2
哈密顿主函数和作用量的关系 15
莫佩尔蒂（Maupertuis）原理 17
“作用-角度”变量 20

哈密顿-雅可比方程

哈密顿-雅可比方程

- 哈密顿-雅可比方法是通过正则变换令哈密顿量变为零，新正则坐标都为常数，没有时间演化。
- 出发点：特殊的正则变换使新哈密顿量 $K = H + \frac{\partial G}{\partial t}$ 变得最简单（$K = 0$）.

$$\boxed{K = 0 \Longrightarrow \dot{Q} = \dot{P} = 0.}$$

- 这样的一个正则变换也是动力学的一种等效表达。
- 演化是正则变换，正则变换也可以作为动力学的等效表达。

四类正则变换

生成函数	变换关系		简单示例	
$G = G_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial G_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_i}$	$G_1 = q_i Q_i$	$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$G = G_2(q, P, t) - QP$	$p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial G_2}{\partial P_i}$	$G_2 = q_i P_i$	$Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$G = G_3(p, Q, t) + qp$	$q_i = -\frac{\partial G_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial G_3}{\partial Q_i}$	$G_3 = p_i Q_i$	$Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$G = G_4(p, P, t) + qp - QP$	$q_i = -\frac{\partial G_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial G_4}{\partial P_i}$	$G_4 = p_i P_i$	$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

$$\boxed{K = H + \frac{\partial G}{\partial t}}$$

什么样的正则变换能使 $\boldsymbol{K} = \mathbf{0}$？

这样的正则变换等价于动力学方程本身。

- 手段：选用第二型生成函数 $G_2 = S(q, P, t)$，有

$$\boxed{p = \frac{\partial S}{\partial q}}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

- 要求新哈密顿量为零，可得

$$K = 0 \Longrightarrow \boxed{H\left(q, \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0.}$$

哈密顿-雅可比方程

哈密顿-雅可比方程:

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} = 0.}$$

是关于哈密顿主函数 S 的偏微分方程。

哈密顿-雅可比方程的好处是可以将偏微分方程解的常数和守恒量联系起来。

- 在新坐标中，$\boldsymbol{P}$ 是常数！从哈密顿-雅可比方程

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

  解出满足条件的 $S = f(q_1, ..., q_s, t; \alpha_1, ..., \alpha_s) + c$，其中 α_i 和 c 是常数。相加形式的常数 c 可以被略去。
- 将 α_i 作为新的广义动量 P，求出新的坐标 $Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$。从含时坐标变换中可以反推出 $q(t)$ 和 $p(t)$ 的表达式。

哈密顿-雅可比方程的好处是可以通过分离变量法来直接求守恒量。

如果哈密顿量不含时，那么能量守恒，选

$$S = W(q) - f(t)$$

(分离变量 q 和 t)，哈密顿-雅可比方程变为

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

左边含 q 右边含 t，因此只能等于某个常数 E， $f(t) = Et$.

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E}$$

这里的 $W(q)$ 被称为哈密顿特征函数（Hamilton's characteristic function）.

一般的分离变量法

如果某一个广义坐标和它的正则共轭动量（假设是 q_1 和 p_1）只出现在一个和其他变量无关的组合 $\varphi(q_1, p_1)$ 中，那么就可以将 φ 作为一个组合用其他变量表示，从而将 (q_1, p_1) 和其他的变量。

- 此时,

$$W(q) = W_1(q_1) + W'(q_2, ...q_n)$$

例: 简谐振子

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}}$$

不含时的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E$$

解为

$$W(q) = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)}\, \mathrm{d}q$$

- 特征函数里面的积分如果比较复杂，可以先保留。 为什么?

例: 简谐振子

- 新动量 $P = E$，新坐标为

$$t_0 \equiv Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \sqrt{\frac{m}{2E - m\omega^2 q^2}}\,\mathrm{d}q - t$$
$$= \frac{1}{\omega} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \right) - t$$

从中可以反解 $q(t)$ 和 $p(t)$ 的表达式:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + t_0)),$$
$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega(t + t_0))$$

其中 E, t_0 由初始条件确定。

例：开普勒问题

$$\boxed{H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+V(r)}$$

不含时的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right)+V(r)=E$$

- 因为哈密顿量不依赖 θ，因此可以引入守恒量 $\frac{\partial W}{\partial \theta}=J$。
- 分离变量法，假设

$$W(r,\theta)=W_1(r)+W_2(\theta)$$

- 代入哈密顿-雅可比方程，得到

$$r^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2+2mr^2[V(r)-E]=-\left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta}\right)^2=-J^2$$

例：开普勒问题

$$\Longrightarrow \frac{\partial W_2}{\partial \theta} = J, \quad r^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + 2mr^2[V(r) - E] = -J^2$$

- 积分后给出

$$W_2 = J\theta, \quad W_1 = \int^r \sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J^2}{r'^2}}\, \mathrm{d}r'$$

- 正则变换：$(r, \theta, p_r, p_\theta) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2) \equiv (t_0, \theta_0, E, J)$:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \mathrm{d}r\, \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} - t$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial J} = \theta - \int \mathrm{d}r\, \frac{J/r^2}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}}$$

- 从 $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = 0$ 可以得出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 的表达式，和中心力场部分得到的结果一致。

例：均匀磁场中的带电粒子

$$\boxed{H=\frac{\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2}{2m}}$$

其中 $\vec{A}$ 是矢量势，$\vec{p}$ 是正则动量。

选取规范：$\vec{A}=(0,Bx,0)$，验证 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=B\hat{z}$.

$$H=\frac{p_x^2+\left(p_y-eBx\right)^2+p_z^2}{2m}$$

不含时的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}-eBx\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=E$$

注意 y 和 z 是循环坐标，可分离变量。设

$$W(x,y,z)=W_1(x)+W_2(y)+W_3(z)$$

代入哈密顿-雅可比方程，得到

例：均匀磁场中的带电粒子

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_2}{\partial y} - eBx\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_3}{\partial z}\right)^2 = E$$

守恒量 E, p_y, p_z:

$$W_1(x) = \int \sqrt{2mE - p_z^2 - \left(p_y - eBx\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$W_2(y) = p_y y,$$

$$W_3(z) = p_z z$$

哈密顿主函数和作用量的关系

$$\boxed{H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0}$$

由于 $K=0$, $S(q,P,t)$ 中的 P 是常数，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\frac{\partial S}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i+\frac{\partial S}{\partial t}\,\mathrm{d}t\\&=p_i\,\mathrm{d}q_i-H\,\mathrm{d}t\\&=(p_i\dot{q}_i-H)\,\mathrm{d}t\\&=L\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

注意：$\mathrm{d}S$ 的全微分中没有 $\mathrm{d}P$ 是因为 P 是常数，而这个结论利用了新坐标下的运动方程。

S 是沿着运动方程积分的作用量。

$$S=\int L\,\mathrm{d}t+\text{constant}$$

莫佩尔蒂（**Maupertuis**）原理

莫佩尔蒂（Maupertuis）原理

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \, \mathrm{d}q_i - H \, \mathrm{d}t)}$$

- 如果拉格朗日量或者哈密顿量不显含时间，那么能量 E 守恒.
- 莫佩尔蒂（Maupertuis）原理考虑的轨迹限制在所有能量守恒的轨迹。在此限制下，作用量为:

$$S[q] = \underbrace{\int_{q_1}^{q_2} p_i \, \mathrm{d}q_i}_{\text{简约作用量 } S_0} - Et + \underbrace{\cancel{\text{constant}}}_{\text{常数可省}}$$

- 简约作用量（Abbreviated action）$S_0[q]$: 是所有起点和终点固定的能量守恒轨迹的作用量。
- 对于能量守恒的系统来说，莫佩尔蒂（Maupertuis）原理: $\delta S_0 = 0 \Longrightarrow$ 运动方程。

莫佩尔蒂（Maupertuis）原理

莫佩尔蒂（Maupertuis）原理的应用:

$$L = \frac{1}{2} M_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q) \Longrightarrow p_i = M_{ij}\dot{q}_j$$

利用能量守恒, 有

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{M_{ij}\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j}{2(E-U)}} = \sqrt{\frac{1}{2(E-U)}}\,\mathrm{d}\ell$$

$$p_i\,\mathrm{d}q_i = M_{ij}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}q_i = \sqrt{2(E-U)}\frac{M_{ij}\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\ell} = \sqrt{2(E-U)}\,\mathrm{d}\ell$$

$$S_0 = \int p_i\,\mathrm{d}q_i = \int \sqrt{2(E-U)}\,\mathrm{d}\ell$$

自由粒子（$U=0$），连接两端点的轨道是测地线（$\delta\int \mathrm{d}\ell = 0$）。

“作用-角度”变量

“作用-角度”变量

对周期性系统，可以通过“作用-角度”变量，不需要先解析运动方程，就能够求得振动或旋转的频率。

- 振动：相流是椭圆。
- 旋转：相流周期性重复（或者对坐标引入周期性条件）。

是否可以通过正则变换将哈密顿量变为只依赖广义动量的函数？
如果可以，那么新的正则坐标都是循环变量。

$$(q, p) \longrightarrow (\theta, J) \text{ such that } H = H(J)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} =: \omega_i,$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0.$$

- 作用量和角动量的量纲是一样的。

关键问题：如何找到这样的正则变换？

从单自由度系统开始找线索。

- 因为 J 是守恒量，角度变量有 2π 周期性，于是有

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint J\,\mathrm{d}\theta$$

- 坐标变化下，相空间的面积保持不变

$$\mathrm{d}J\,\mathrm{d}\theta = \det(M)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q,$$

其中 M 是正则变换的雅可比矩阵。

- 正则变换下，

$$M^\top \omega M = \omega \implies \det(M) = 1$$

于是，

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}q$$

“作用-角度”变量

考虑一个简谐振子，哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2}m + m\omega^2\frac{q^2}{2}.$$

哈密顿方程:

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m\omega^2 q.$$

哈密顿方程的解可以被表示为

$$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad p(t) = -Am\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

其相流是椭圆。

做受限正则变换 $(q, p) \to (\theta, I)$:

$$q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin\theta, \quad p = \sqrt{2Im\omega}\cos\theta.$$

快速验证这是一个正则变换的两种方法:

1. 保持泊松括号不变:

$$[q,p]_{\theta,I}=\frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial I}-\frac{\partial q}{\partial I}\frac{\partial p}{\partial\theta}=1.$$

2. 雅可比行列式是辛矩阵

新的哈密顿量为

$$H=\omega I$$

新的哈密顿方程为

$$\dot{\theta}=\omega,\quad \dot{I}=0.$$

新的相流是直线，I 是常数，θ 是循环变量。

对于什么样的系统，可以做到这一点?

“作用-角度”变量

快速验证这是一个正则变换的两种方法:

1. 保持泊松括号不变:

$$[q, p]_{\theta, I} = \frac{\partial q}{\partial \theta}\frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 1.$$

2. 雅可比行列式是辛矩阵

新的哈密顿量为

$$H = \omega I$$

新的哈密顿方程为

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{I} = 0.$$

新的相流是直线, I 是常数, θ 是循环变量。

对于什么样的系统, 可以做到这一点?

$$\boxed{\text{可积系统}}$$

可积系统

- 作用-角变量是通过正则变换令哈密顿量变为只是广义动量 P 的函数，因此新正则坐标下 Q 都是循环变量。在相图中，相流被拉直。
- 并非对于所有系统都可以做到。
- 可积系统可以做到！

并非所有系统都是可积系统

预祝你考试取得好成绩！