理论力学

第 14 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

正则变换

拉格朗日力学：广义坐标

哈密顿力学：坐标和动量是平等的独立变量

坐标变换能被扩展到相空间

正则变换

拉格朗日力学

- 新旧坐标变换: $Q_i = Q_i(q, t)$
- 将拉格朗日量用新坐标表示
- 新坐标下的欧拉-拉格朗日方程和哈密顿方程仍然成立

哈密顿力学

- 推广的独立变量变换——相空间中的坐标变换

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t) \quad \text{或} \quad \xi_\alpha \mapsto \eta_\alpha(\xi, t)$$

- 是否能有一个新变量的哈密顿量 $K(Q, P, t)$ 使得

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

- 满足上述条件的变换被称为正则变换。
- 问题: 什么样的变换 $(q, p, H) \to (Q, P, K)$ 能正则方程形式不变?

正则变换条件

- 如何找到正则变换？ 以最小作用量原理为桥梁

$$S[q;t_0,t_1] = \int_{t_0}^{t_1} (p_i\dot{q}_i - H)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} (p_i\,\mathrm{d}q_i - H\,\mathrm{d}t)$$

$$\boxed{\delta S = 0 \iff \text{运动方程}}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)]\,\mathrm{d}t = 0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right]\mathrm{d}t$$

- 拉格朗日量相差一个时间全微分项不影响 δS，从而不影响运动方程形式。
- 由此可得条件

$$\boxed{\lambda[p\dot{q} - H(q,p,t)] = P\dot{Q} - K(Q,P,t) + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}}$$

- $\lambda = 1$: 正则变换（canonical transformations）
- $\lambda \neq 1$: 扩展正则变换（extended canonical transformations）。一般不考虑

正则变换的生成函数

正则变换条件

$$\boxed{p\dot{q} - H(q,p,t) = P\dot{Q} - K(Q,P,t) + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}}$$

- G 的微分形式为

$$\Longrightarrow \mathrm{d}G = p_i\,\mathrm{d}q_i - P_i\,\mathrm{d}Q_i + (K - H)\,\mathrm{d}t$$

- 上述微分意味着如果 G 的自变量为 (q,Q,t)，即 $G = G_1(q,Q,t)$，正则变换关系为

$$p_i = \frac{\partial G_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial G_1}{\partial t}$$

- G 被称为正则变换的生成函数，给出新旧正则坐标的变换关系
- 例:

$$G(q,Q) = q_i Q_i$$
$$\Longrightarrow p_i = Q_i, \quad P_i = -q_i, \quad K = H(-P_i, Q_i)$$

正则变换的生成函数

- G 还可以选择其他变量。
- 例：利用正则变换条件和勒让德变换，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= p_i \,\mathrm{d}q_i - P_i \,\mathrm{d}Q_i + (K-H)\,\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow \mathrm{d}(G + Q_i P_i) &= p_i \,\mathrm{d}q_i + Q_i \,\mathrm{d}P_i + (K-H)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- 如果 $G_2(q,P,t) = G - Q_i P_i$ 是 (Q,P,t) 的函数, 那么

$$\mathrm{d}G_2(q,P,t) = p_i \,\mathrm{d}q_i + Q_i \,\mathrm{d}P_i + (K-H)\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial G_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}$$

其他生成函数的自变量取法不同，可以在第一型基础上调用勒让德变换.

生成函数的四种类型

生成函数	变换关系		简单示例	
$G = G_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial G_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_i}$	$G_1 = q_i Q_i$	$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$G = G_2(q, P, t) - QP$	$p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial G_2}{\partial P_i}$	$G_2 = q_i P_i$	$Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$G = G_3(p, Q, t) + qp$	$q_i = -\frac{\partial G_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial G_3}{\partial Q_i}$	$G_3 = p_i Q_i$	$Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$G = G_4(p, P, t) + qp - QP$	$q_i = -\frac{\partial G_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial G_4}{\partial P_i}$	$G_4 = p_i P_i$	$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

哈密顿量的变换关系可以统一写为

$$K = H + \frac{\partial G}{\partial t}$$

正则变换的辛条件

（时间无关）正则变换的辛条件

受限正则变换（Restricted canonical transformations）是不依赖时间的正则变换，即 $Q = Q(q,p)$ 和 $P = P(q,p)$。

- 辛形式下，考查 $\dot{\xi} = \omega \frac{\partial H}{\partial \xi}$ 在坐标变换 $\xi \to \eta(\xi)$ 下的变化，其中 $\omega = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1}_s \\ -\mathbb{1}_s & \mathbb{0} \end{pmatrix}$
- 新旧相空间坐标间的微分变换关系由雅可比矩阵来描述:

$$\mathrm{d}\eta_\alpha = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\beta}\,\mathrm{d}\xi_\beta = \underbrace{M_{\alpha\beta}}_{\text{雅可比矩阵}}\,\mathrm{d}\xi_\beta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\eta} = M\dot{\xi}}$$

- 切向量的变换:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\beta}\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} = M_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \xi} = M^\mathsf{T}\frac{\partial}{\partial \eta}}$$

- 与正则方程 $\dot{\xi} = \omega \partial H/\partial \xi$ 结合起来

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = M\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\omega\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}} = (M\omega M^\mathsf{T})\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

- 满足 $M\omega M^\mathsf{T} = \omega$ 的矩阵 M 被称为辛矩阵

辛条件下泊松括号保持不变。

- 回忆泊松括号:

$$[f,g]_{q,p}=\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i},\quad [f,g]_{Q,P}=\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i}-\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}.$$

- 相空间形式

$$\xi=\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix},\quad \omega=\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1}_s\\ -\mathbb{1}_s & \mathbb{0}\end{pmatrix},\quad \eta=\begin{pmatrix} Q\\ P\end{pmatrix}$$

- 泊松括号可以被表示为

$$[f,g]_\xi=\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}=\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^{\mathsf{T}}\omega\frac{\partial g}{\partial \xi}}_{\omega\text{ 为度规张量的内积形式}}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^{\mathsf{T}}\boxed{M\omega M^{\mathsf{T}}}\frac{\partial g}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^{\mathsf{T}}\boxed{\omega}\frac{\partial g}{\partial \eta}=[f,g]_\eta$$

辛条件和泊松括号的不变性

辛条件下泊松括号保持不变, 因此泊松括号的下标可以不写:

$$[f,g]_{q,p}=[f,g]_{Q,P}=[f,g].$$

- 基本泊松括号

$$[Q_i,Q_j]=[P_i,P_j]=0,\quad [Q_i,P_j]=\delta_{ij}$$

- 一般正则变换:

$$\xi \to \eta(\xi, t), \quad H \to K = H + \frac{\partial G}{\partial t}$$

- 利用 (q, p, H) 的正则方程

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(\xi, t) &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi}\omega\frac{\partial}{\partial \xi}H + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{@旧正则方程} \\ &= M\omega M^{\mathsf{T}}\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\end{aligned}$$

- 利用 (Q, P, K) 的新正则方程，其中 $K = H + \frac{\partial G}{\partial t}$:

$$\dot{\eta} = \omega\frac{\partial K}{\partial \eta} = \omega\frac{\partial H}{\partial \eta} + \omega\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial t}$$

- 正则变换要求这两式相等，于是

$$\boxed{M\omega M^\mathsf{T}\frac{\partial H}{\partial \eta}} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \boxed{\omega\frac{\partial H}{\partial \eta}} + \omega\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial t}$$

- 左右两边分别有依赖和不依赖 H 的项。
- 如果要求正则变换适用于所有 H，则必须满足

$$M\omega M^\mathsf{T} = \omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial t}$$

- 保辛条件 $M\omega M^\mathsf{T} = \omega$ 仍然需要满足.

，同时它也是充分的。这是因为

$$M\omega M^\mathsf{T} = \omega \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial t}$$

- 证明:

无穷小正则变换

- 正则坐标分量的无穷小变化:

$$\xi_\alpha \to \xi_\alpha + \epsilon X_\alpha(\xi)$$

- 泊松括号不变

$$\begin{aligned}
&\left[\xi_\alpha + \epsilon X_\alpha(\xi), \xi_\beta + \epsilon X_\beta(\xi)\right] = \left[\xi_\alpha, \xi_\beta\right] \\
\Longrightarrow\ & \epsilon\left[\xi_\alpha, X_\beta\right] + \epsilon\left[X_\alpha, \xi_\beta\right] = 0 \\
\Longrightarrow\ & \left[\xi_\alpha, X_\beta\right] + \left[X_\alpha, \xi_\beta\right] = 0
\end{aligned}$$

- 如果 $X_\alpha = [\xi_\alpha, G]$, 则满足上述条件。验证

$$\begin{aligned}
\left[\xi_\alpha, X_\beta\right] + \left[X_\alpha, \xi_\beta\right] &= \left[\xi_\alpha, \left[\xi_\beta, G\right]\right] + \left[[\xi_\alpha, G], \xi_\beta\right] \\
&= \left[\xi_\alpha, \left[\xi_\beta, G\right]\right] + \left[\xi_\beta, [G, \xi_\alpha]\right] \\
&= -\left[G, \left[\xi_\alpha, \xi_\beta\right]\right] = -\left[G, \omega_{\alpha\beta}\right] = 0.
\end{aligned}$$

- 称力学量 G 为无穷小正则变换的生成元。

作业

作业

1. 证明泊松括号的 4 个性质。
2. 证明泊松定理。
3. 对简谐振子的哈密顿量，进行表格中的 4 类最简单的正则变换，给出新旧坐标的变换关系和新哈密顿量。

几何化

向量的基矢和展开

$$\vec{r} = r_i \vec{e}_i, \quad r_i = \vec{e}_i \cdot \vec{r} = \langle \vec{e}_i, \vec{r} \rangle$$

非正交基矢下，需要使用对偶基矢来得到展开系数:

$$\vec{e}_i^* \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad r_i = \vec{e}_i^* \cdot \vec{r}$$

多元函数在每一点上以偏导数的形式提供了一系列“分量”

$$\mathrm{d}f = f_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \quad f_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mathrm{d}f \right\rangle$$

拉格朗日量提供分量的方式，以 $(\mathrm{d}q, \mathrm{d}\dot{q}, \mathrm{d}t)$ 为基矢展开 $\mathrm{d}L$:

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t$$

换新坐标 $q \to Q(q)$:

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial Q_i} \mathrm{d}Q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \mathrm{d}\dot{Q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t$$

从拉格朗日量到哈密顿量的变换:

$$L(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$$

哈密顿量的微分:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q_i} \,\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t} \,\mathrm{d}t$$

利用欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \mathrm{d}(p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)) \\ &= -\dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

两式相等，得到正则方程:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$