理论力学

第 13 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

相空间与刘维尔定理

相空间

相空间是由 s 个广义坐标和 s 个广义动量为坐标轴的 $2s$ 维空间。

- 相空间中的每一个点代表动力学系统的一个确定状态。

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = (q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s)^{\mathsf{T}}$$

- 系统运动时，相空间中相点运动画出的曲线称为相轨道。
- 相轨道完全由哈密顿正则方程唯一确定。相空间每一点的速度由哈密顿向量场 X_H 给出

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{pmatrix} \equiv X_H$$

- 定义“梯度”和反对称的 ω 矩阵:

$$X_H = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{0}_{s\times s} & \mathbb{1}_{s\times s} \\ -\mathbb{1}_{s\times s} & \mathbb{0}_{s\times s} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} H$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_s}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_s} \right)^{\mathsf{T}}$$

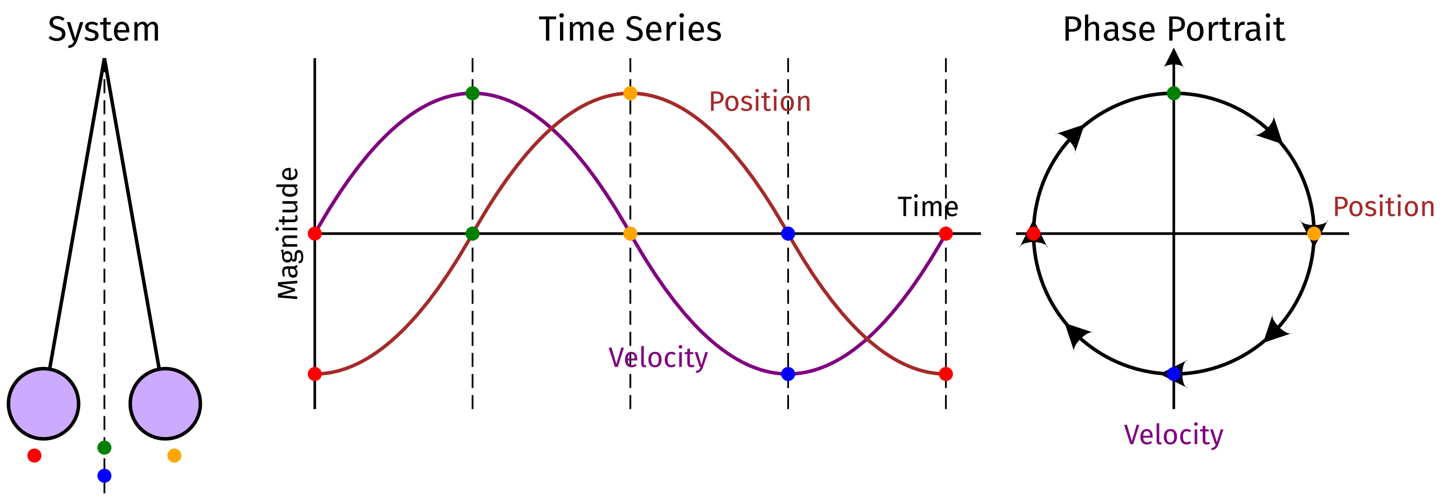
其中矩阵 ω 满足 $\boldsymbol{\omega}^{-1} = \boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}$.

- 因为 ω 是反对称矩阵，所以哈密顿向量场 X_H 和哈密顿量的梯度 $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ 是垂直的。对于不含时哈密顿系统来说，这体现了运动过程中能量不变的特性。
- 动力学给出了相空间中每一点的速度场 X_H，而相空间中的每一点都可以看作是一个动力学系统的状态。

简谐振子的相图

- 例：简谐振子

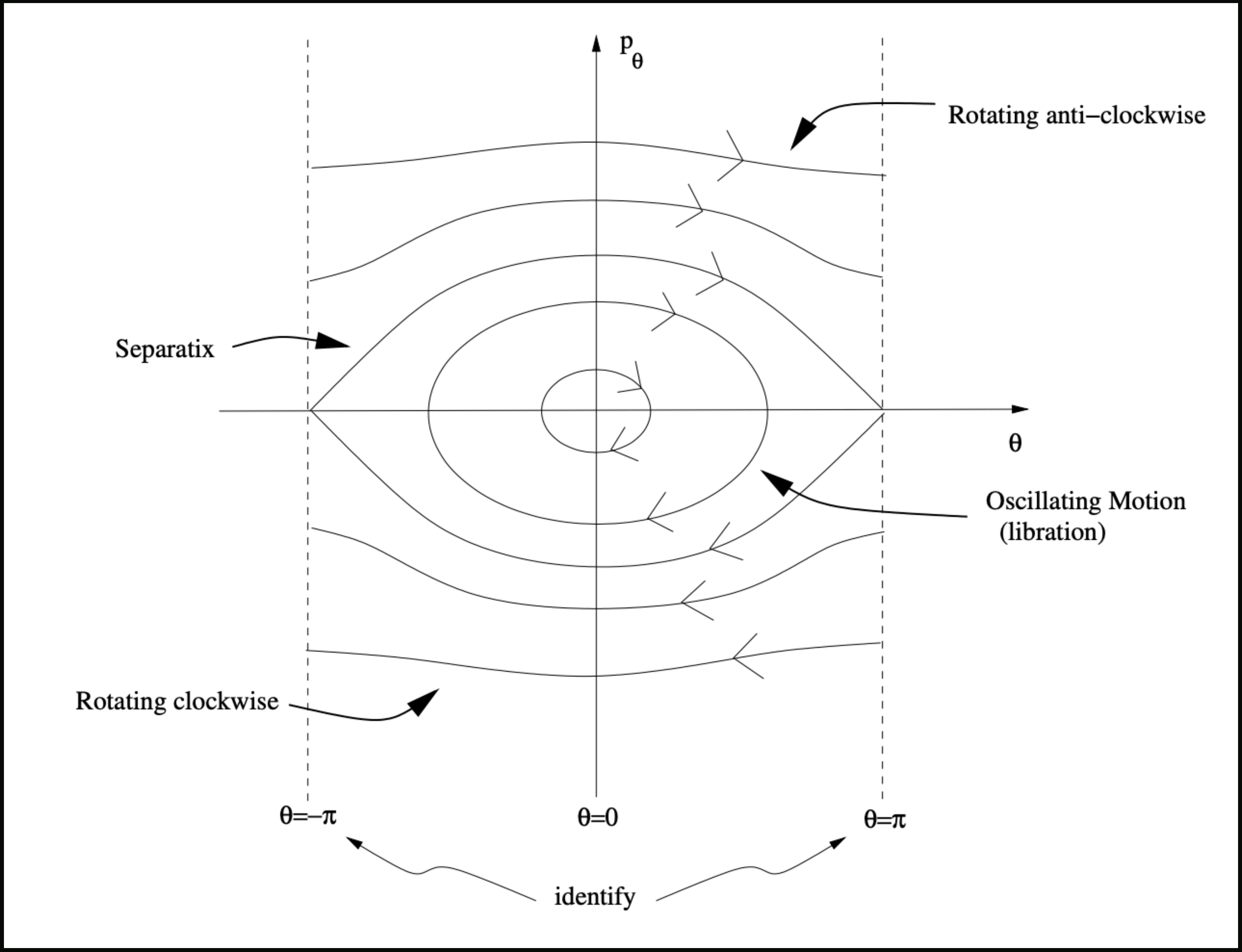
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$



一维简谐振子 By Krishnavedala - Own work, CC BY-SA 4.0

- 以动量为其中一坐标的话，一般为椭圆

单摆的相图



From David Tong's lecture notes on Classical Mechanics,
http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/classical/

相流的刘维尔定理

- 考虑相空间中一个封闭区域，无穷小时间间隔下进入该区域的点为

$$\int_{\partial V} \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{V} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\Gamma$$

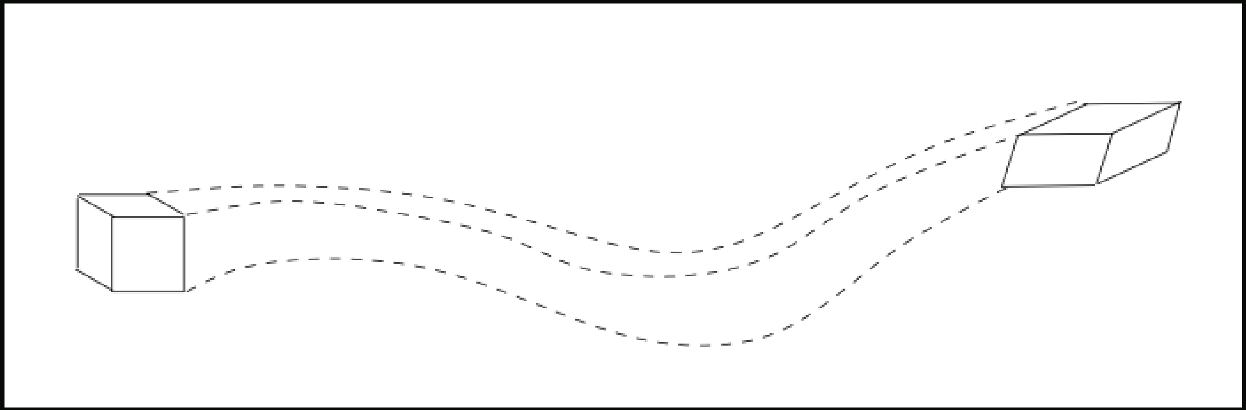
- 相空间中速度场的散度:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = 0
\end{aligned}$$

- 相空间中所有相点的运动类似于不可压缩液体的流动.
- 这是刘维尔定理的一种表述。

相流的刘维尔定理

刘维尔定理的另一表述：相空间体积元随时间不变



- 相空间体积元为 $\mathrm{d}^{2s}\xi \equiv \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_s\, \mathrm{d}p_1 \ldots \mathrm{d}p_s$。
- 体积元之比为坐标变换的雅可比行列式

$$\mathrm{d}^{2s}\xi(t) = \det(J)\, \mathrm{d}^{2s}\xi(0)$$

其中 $J_{ij} = \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial \xi_j(0)}$ 为 $\xi(0) \to \xi(t)$ 的雅可比矩阵。

- 行列式的雅可比公式：

$$\frac{\mathrm{d}\det(J)}{\mathrm{d}t} = \det(J)\,\mathrm{tr}\left(J^{-1}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\right).$$

相流的刘维尔定理

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(J^{-1}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\right) &= \left(J^{-1}\right)_{ij}\frac{\mathrm{d}J_{ji}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial\xi_i(0)}{\partial\xi_j(t)}\frac{\partial\dot{\xi}_j(t)}{\partial\xi_{i(0)}} \\
&= \frac{\partial}{\partial\xi_j(t)}\dot{\xi}_j(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial\xi_j(t)}\omega_{jk}\frac{\partial}{\partial\xi_k(t)}H \\
&= 0
\end{aligned}$$

- 因此， $\det(J)$ 与时间无关。$J(t=0)$ 是单位矩阵， 所以 $\det(J(t))=1$。
- 这就是刘维尔定理的另一种表述： 相空间体积元随时间不变。

力学量与泊松括号

力学量

- 哈密顿力学中力学量 $f(q,p,t)$ 是广义坐标、广义动量和时间的函数。
- 哈密顿力学处理力学量随时间变化率比较方便
- 坐标-速度作为状态时，力学量的随时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}f(q,\dot{q},t)}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_i\frac{\partial f}{\partial q_i}+\ddot{q}_i\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

- 坐标-动量作为状态时，力学量的随时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}f(q,p,t)}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_i\frac{\partial f}{\partial q_i}+\dot{p}_i\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

可以直接使用哈密顿正则方程。

力学量和泊松括号

- 力学量的 $f(q,p,t)$ 的随时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

- 将哈密顿正则方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

对于任意两个力学量的泊松括号定义为

$$[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

- 泊松括号是将两个力学量进行运算后产生一个新的力学量的过程
- 若哈密顿量不显含时，$[f, H]$ 给出了 f 的随时间变化率。

泊松括号

$$[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

验算泊松括号具有以下代数性质（需要熟悉）：

反交换性	$[f, g] = -[g, f]$
线性	$[\alpha f + \beta g, h] = \alpha[f, h] + \beta[g, h]$
莱布尼茨法则	$[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$
雅可比恒等式	$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

上述性质对于以下两类代数也满足

- 矩阵乘法定义的对易子

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

- 海森堡矩阵力学

- 线性算符的对易子

$$[F, G]\psi \equiv (F \circ G)\psi - (G \circ F)\psi$$

- 薛定谔波动力学

“正则坐标”的泊松括号

- 验证“正则坐标”的泊松括号满足:

$$
\begin{aligned}
\left[q_i, p_j\right] &= \delta_{ij} \\
\left[q_i, q_j\right] &= \left[p_i, p_j\right] = 0
\end{aligned}
$$

- 验证微分算符的对易关系满足

$$
\left[x, \frac{\partial}{\partial x}\right]\psi = x\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial (x\psi)}{\partial x} = \cancel{x\frac{\partial \psi}{\partial x}} - \psi - \cancel{x\frac{\partial \psi}{\partial x}} = -\psi
$$

- 因此 $\left[x_i, -\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \delta_{ij}$，和正则坐标的泊松括号一致。
- $-\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和动量之间的关系?

正则坐标泊松括号的作用

- 其他力学量的泊松括号可以从正则坐标泊松括号导出。
- 莱布尼茨法则 $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$ 使得泊松括号和求导存在深刻联系。
- 利用柏松括号的莱布尼茨法则和正则坐标的柏松括号，可得

$$[q^n, p] = [q^{n-1}q, p] = q^{n-1}\underbrace{[q, p]}_{=1} + \underbrace{[q^{n-1}, p]}_{\text{递归}} q = nq^{n-1} = \frac{\mathrm{d}q^n}{\mathrm{d}q}$$

- 任意的力学量 $f(q, p, t)$ 都可以对 q 变量做泰勒展开:

$$f(q, p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial q^n} \right) \bigg|_{q=0}$$

- 因此对于任意的力学量 $f(q, p, t)$都有

正则坐标泊松括号的作用

$$
\begin{aligned}
[f,p] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [q^n, p] \left(\frac{\partial^n f}{\partial q^n} \right) \bigg|_{q=0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d} q^n}{\mathrm{d} q} \left(\frac{\partial^n f}{\partial q^n} \right) \bigg|_{q=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial q^n} \right) \bigg|_{q=0} \\
&= \frac{\partial f}{\partial q}
\end{aligned}
$$

- 类似地，可验证

$$
[f,q] = -\frac{\partial f}{\partial p}
$$

泊松括号和守恒量

守恒量的定义: 如果一个力学量 $f(q,p,t)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$，则被称为守恒量.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=0$$

泊松定理: 如果 f 和 g 都是守恒量，则 $[f,g]$ 也是守恒量。即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}[f,g]}{\mathrm{d}t}=0.$$

泊松定理的证明:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[f,g]}{\partial t}+[[f,g],H] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]-[[g,H],f]-[[H,f],g] \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H],g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}+[g,H]\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

角动量的泊松括号

角动量:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

泊松括号的运算（利用正则坐标的泊松括号）

$$\begin{aligned}[L_1, L_2] &= [r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3] \\ &= r_2 [p_3, r_3] p_1 + p_2 [r_3, p_3] r_1 \\ &= r_1 p_2 - r_2 p_1 \\ &= L_3\end{aligned}$$

轮换指标后以及利用泊松括号的反对称性，可得

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

- 推论：角动量的任意两个分量守恒，则第三个分量也守恒。
- 验证：$[L_i, L^2] = 0.$

作业

1. 第六章作业第 1 题
2. 求笛卡尔坐标、柱坐标和球坐标下单个质点的哈密顿函数。
3. 验证对于任意力学量 f，都有 $[f, q] = -\frac{\partial f}{\partial p}$。
4. 在开普勒问题中，验证 LRL 向量 A 是守恒量，即证明 $[A, H] = 0$。