理论力学

第 12 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

刚体的运动方程

角动量

$$L = \frac{1}{2}M\vec{v}_c^2 + \frac{1}{2}\Omega_j I_{jk}\Omega_k - V\left(\vec{r}_c, \vec{\phi}\right)$$

- 广义坐标: $\vec{r}_c, \vec{\phi}$; 广义速度: $\vec{v}_c, \vec{\Omega}$
- 角动量

$$J_j = \frac{\partial T}{\partial \Omega_j} = I_{jk}\Omega_k$$

- 角动量的方向和角速度的方向未必相等，除非角速度在主轴方向
- 从势能出发的话，有

$$\vec{P} = M\vec{v}_c, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_c},$$

$$\vec{J} = I\vec{\Omega}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}}.$$

- 从每个质点的受力 $\vec{f}_j$ 出发，有

角动量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{f}_j = \vec{F}_{外}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j \\
&= \sum_j \underbrace{\dot{\vec{r}}_j \times \vec{p}_j}_{=0\text{ 为什么?}} + \sum_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{p}}_j \\
&= \underbrace{\sum_j r_j \times \vec{f}_j}_{\vec{N}\text{ 总力矩}}
\end{aligned}$$

对于欧拉-拉格朗日方程，总力矩和势能的关系为

$$\vec{N} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}}$$

基于基矢的表述

- 矢量表示 = 坐标 + 基矢

$$\vec{G} = G_j \vec{e}_j$$

- 正交归一基矢

$$\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = \delta_{jk} \Longrightarrow v_j = \langle \vec{e}_j, \vec{v} \rangle \Longleftrightarrow \vec{G} = \sum_j \langle \vec{e}_j, \vec{G} \rangle \vec{e}_j$$

- 矢量的变化 = 坐标的变化 + 基矢的变化

$$\dot{\vec{G}} = \dot{G}_j \vec{e}_j + G_j \dot{\vec{e}}_j$$

- 基矢的变化也需要在当前基矢下表示出来

$$\dot{\vec{e}}_j = \sum_k \langle \vec{e}_k, \dot{\vec{e}}_j \rangle \vec{e}_k \quad \Longrightarrow \quad G_j \dot{\vec{e}}_j = \langle \vec{e}_k, \dot{\vec{e}}_j \rangle G_j \vec{e}_k$$

- 对归一化条件求时间导数

在本体坐标系下

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{e}_j,\vec{e}_k\rangle=\langle\dot{\vec{e}}_j,\vec{e}_k\rangle+\langle\vec{e}_j,\dot{\vec{e}}_k\rangle$$

可知 $\langle\dot{\vec{e}}_j,\vec{e}_k\rangle$ 关于 j 和 k 是反对称的。

- 通过定义角速度 $\vec{\Omega}=\Omega_j\vec{e}_j$，有

$$G_j\dot{\vec{e}}_j=\langle\vec{e}_k,\dot{\vec{e}}_j\rangle G_j\vec{e}_k=\Omega\times\vec{G}$$

- 任何矢量 $\vec{G}$ 的变化都能拆分成

$$\mathrm{d}\vec{G}=\underbrace{\left(\mathrm{d}\vec{G}\right)_{\text{body}}}_{\text{本体坐标系中的变化}}+\underbrace{\left(\mathrm{d}\vec{G}\right)_{\text{rot}}}_{\text{转动}=\underbrace{\vec{\Omega}}_{\text{角速度}}\times\vec{G}}$$

- 质点的位矢在本体坐标系中不会变。但力学量可以在本体坐标系下变化。
- 对于角动量

在本体坐标系下

$$\vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{body}} + \vec{\Omega} \times \vec{J}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{body}} = I\left(\dot{\vec{\Omega}}\right)_{\text{body}} = I\begin{pmatrix}\dot{\Omega}_1\\ \dot{\Omega}_2\\ \dot{\Omega}_3\end{pmatrix}$$

对于自由转动（$\vec{N}=0$）而言，

$$I\left(\dot{\vec{\Omega}}\right)_{\text{body}} + \vec{\Omega} \times \vec{J} = 0$$

- 选择本体坐标系方向为惯性主轴后，有欧拉方程

$$\begin{pmatrix}I_1\dot{\Omega}_1\\ I_2\dot{\Omega}_2\\ I_3\dot{\Omega}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}I_1\Omega_1\\ I_2\Omega_2\\ I_3\Omega_3\end{pmatrix} = 0$$

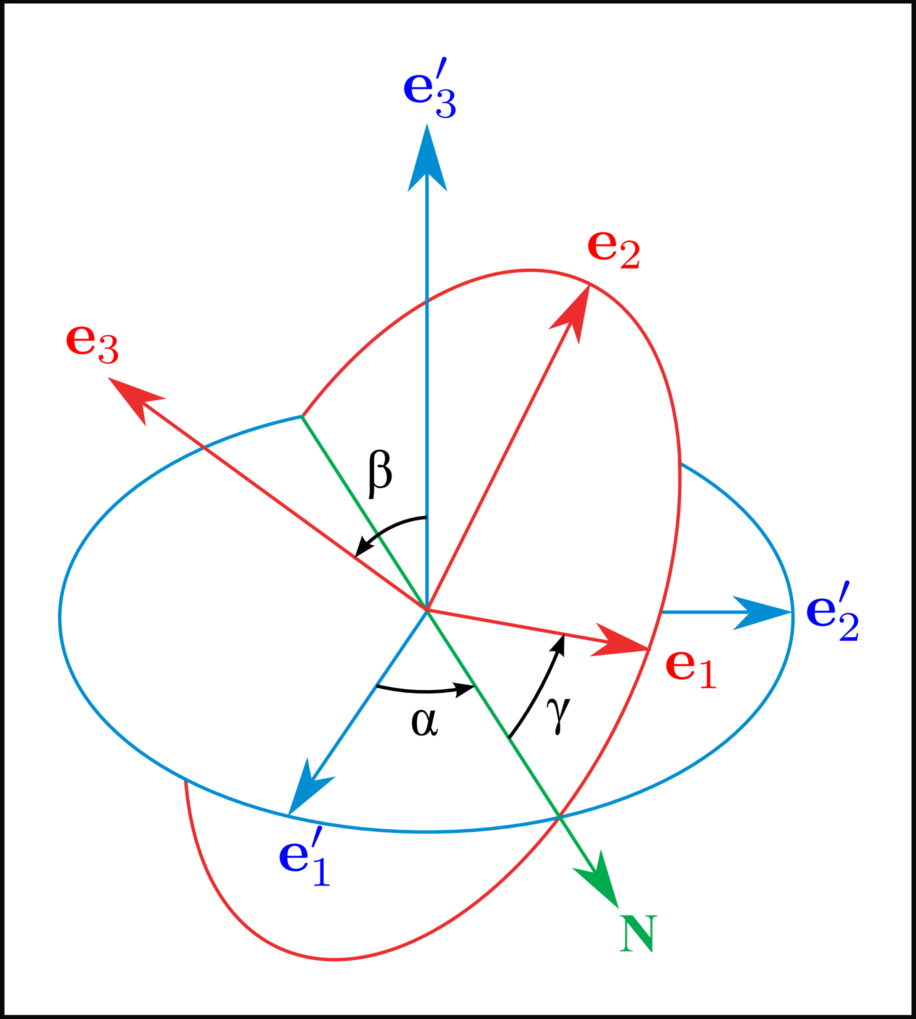
固定坐标系下的角度：欧拉角

注意:

- 刚体问题中一定要注意区分坐标系，分清楚固定坐标系和本体坐标系
- 惯性张量是在本体坐标系下的
- 角速度是在本体坐标系下表示的 $\vec{\Omega} = \Omega_j \vec{e}_j$. (这里的 $\vec{e}_j$ 是本体坐标系下的基矢，在之前的 PPT 中是 $\vec{e}'_j$)
- 要回到固定的坐标系下，还需要将本体坐标系的基矢 $\vec{e}_j$ 还原为和固定坐标系基矢 $\vec{e}'_j$。
- 这等价于转动矩阵 R 的参数化，可以用欧拉角来表示，也可以用“轴-角”来表示 (Axis-Angle-Representation)。通过这些表示，能够将角速度还原到固定坐标系下。

固定坐标系下的角度：欧拉角

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{\Omega} = \Omega_j \vec{e}_j$$

- 将 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ 投影到 $\vec{e}_j$ 上，可以将每个 Ω 表示成广义坐标 α，β, γ 及其广义速度的函数。

第五章作业第 3、6、7 题

（下周交）