理论力学

第 11 讲

陆晓铭

2024-2025-2

lxm@hdu.edu.cn

Outline

参数振荡 2
第五章：刚体的运动 7
刚体运动之角速度 18

参数振荡

参数振荡

特殊性：动力学系统在时间上的周期性.

- 固有频率依赖于时间

$$\ddot{x}(t) + \omega(t)^2 x(t) = 0$$

且满足周期性条件

$$\omega(t+T) = \omega(t)$$

- 例子：单摆的固定点在做振动

运动方程在 $t \to t+T$ 的变化下保持不变。因此，如果 $x(t)$ 是运动方程的解，则 $x(t+T)$ 也是运动方程的解。

参数振荡

- 一维振子有两个线性无关的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$.
- $x(t+T)$ 也是运动方程的解，一定可以表示为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合:

$$x_j(t+T) = R_{jk}x_k(t)$$

- 标准基矢:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0; \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1. \end{aligned}$$

- 在 $t=0$ 时刻,

$$\begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{22} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(T) \\ \dot{x}_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{22} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow R = \begin{pmatrix} x_1(T) & \dot{x}_1(T) \\ x_2(T) & \dot{x}_2(T) \end{pmatrix}$$

参数振荡

- 考虑多个周期，R 矩阵的本征值决定 $x(t)$ 的长时行为.

$$\boldsymbol{x}(t+T) = R\,\boldsymbol{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x}(t+nT) = R^n\,\boldsymbol{x}(t)$$

- 可以选择合适的解使得 R 对角化，即

$$\begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

- R 本征值的特点:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega(t)^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega(t)^2 x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

当 $t \to t+T$，有 $x_i(t+T) = \mu_i x_i(t)$ 和 $\dot{x}_i(t+T) = \mu_i \dot{x}_i(t)$，因此

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 \longrightarrow \mu_1 \mu_2 (\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2)$$

- 由此可得 $\mu_1 \mu_2 = 1$

参数振荡

- 本征值方程

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(R - \mu I) \\
&= (R_{11} - \mu)(R_{22} - \mu) - R_{12}R_{21} \\
&= \mu^2 - (R_{11} + R_{22})\mu + (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})
\end{aligned}
$$

- 一元二次方程的解:

$$
\mu_1, \mu_2 = \frac{R_{11} + R_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(R_{11} + R_{22})^2 - 4(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})}}{2}
$$

- 根据“根号”里面表达式的正负，可以将解分为两类
  - μ_1, μ_2 是实数，有一支会引起共振（参变共振）。
  - μ_1, μ_2 是共轭复数

第四章作业第 7 题

（下周交）

第五章: 刚体的运动

刚体

- 刚体是相互间距随时间保持不变的质点组成的系统. 约束条件:

$$|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)| \text{ 与时间无关}$$

- 为了推导方便，可以将刚体看成是离散质点的集合。连续化则求和变积分。
- 引入两个坐标系：固定坐标系 + 本体坐标架（附着在刚体之上）

$$\boxed{\vec{x}_j = \vec{r}_c + \vec{r}_j \text{ 其中 } \boldsymbol{r}_j \text{ 是质点在本体坐标系中的位置向量}}$$

- 本体坐标系的原点一般放在刚体的质心 $\vec{r}_c$ 处，这样会比较方便

问题：刚体的运动的位形空间是怎么样的?

问题：刚体的运动有多少自由度?

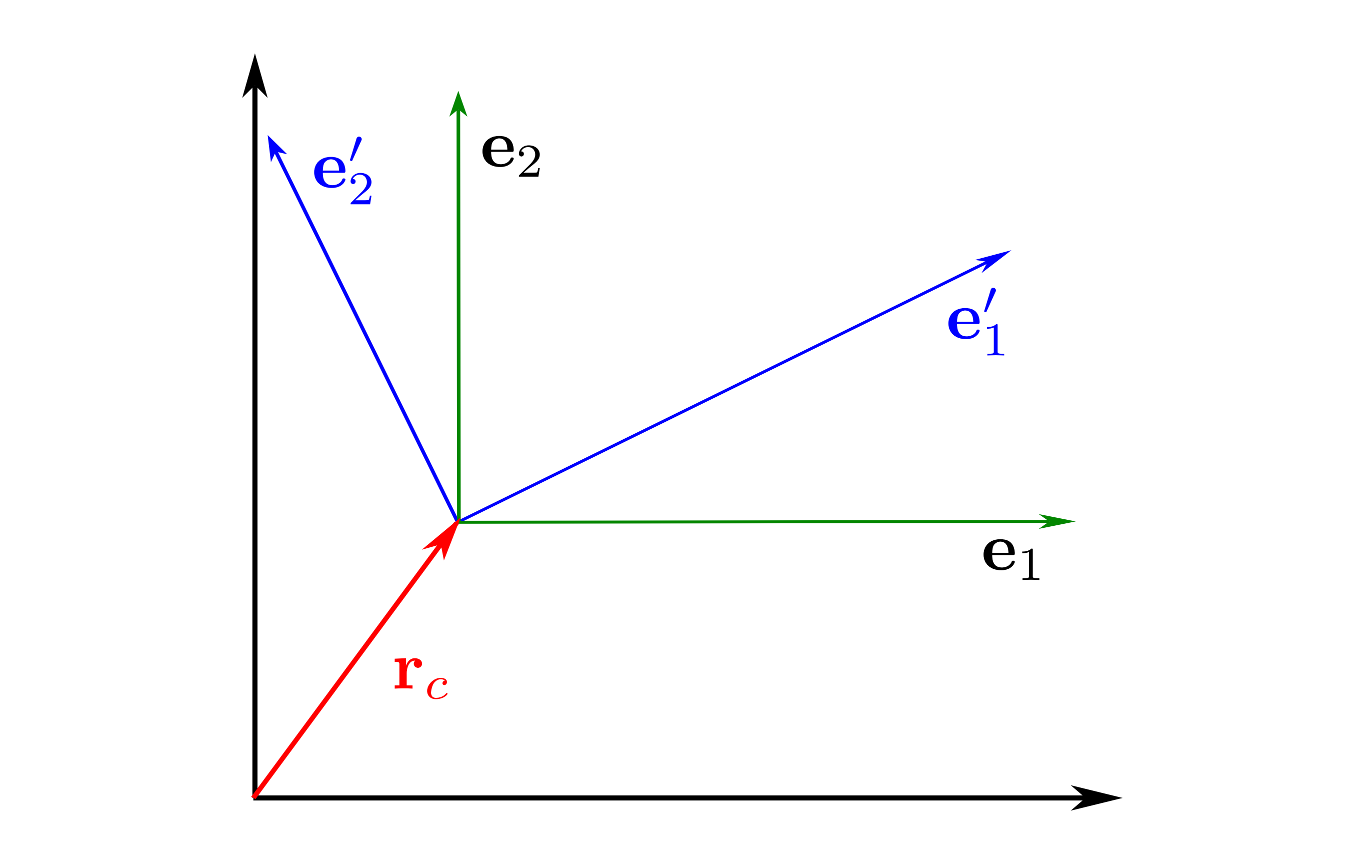
$$\vec{x}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i$$

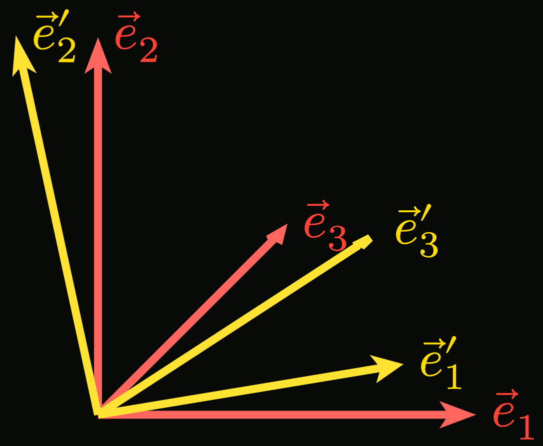
- $\vec{r}_c$ 中有 3 个自由度，代表质心的运动。
- 不同质点在本体坐标系中的位置向量 $\vec{r}_i$ 是不独立的，受刚体约束条件的限制。
- 在本体坐标系中，所有刚体质点的坐标不随时间改变，只有基矢在随时间改变.

$$\vec{r}_i = \sum_j r_{i,j}\vec{e}_j,$$

  其中 $\vec{e}_j$ 是本体坐标架的基矢。
- 因此，所有 $\vec{r}_i$ 变化的自由度实际上只由 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_3$ 的变化来承担。

刚体





$$\{\vec{e}_j\} \xrightarrow{R} \{\vec{e}_j'\}$$

$$\vec{e}_j' = R_{jk}\vec{e}_k$$

$$\begin{aligned}
\delta_{mn} &= \langle \vec{e}_m', \vec{e}_n' \rangle \\
&= R_{mj}R_{nk}\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle \\
&= R_{mj}R_{nk}\delta_{jk} \\
&= R_{mj}R^{\mathsf{T}}_{jn} \\
\Rightarrow RR^{\mathsf{T}} &= I
\end{aligned}$$

- 变换矩阵 R 需要满足 $RR^{\mathsf{T}} = I$

$$
\begin{aligned}
1 &= \det(I) = \det\left(RR^{\mathsf{T}}\right) \\
&= \det(R)\det\left(R^{\mathsf{T}}\right) = \det(R)^2 \\
\Rightarrow &\det(R) = \pm 1
\end{aligned}
$$

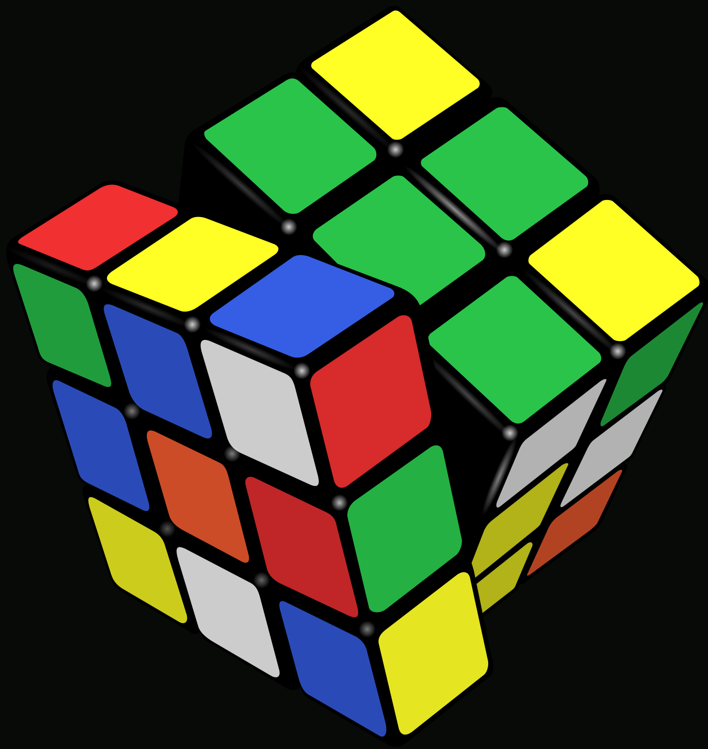
- 满足要求的 R 被分为了两类.
- 恒等变换位于 $\det(R) = 1$ 的这一类。
- 群论中称 $\det(R) = 1$ 的这一类变换为 SO(3) 群，描述的是 3 维空间中的转动。
- 群论中称 $\det(R) = \pm 1$ 的所有变换为 O(3) 群

$\det(R) = 1$ 和 $\det(R) = -1$ 的两类变换差了一个空间反演。

群的定义

群是满足下面条件的一个集合 G 及 “乘法”:

1. 联合律: $a(bc) = (ab)c \,\forall\, a, b, c \in G$
2. 存在单位元: $ae = ea \,\forall a \in G$
3. 存在逆元: $\forall a \in G, \exists\, a\, \text{s.t.}\ ab = ba = e$



非阿贝尔群: 乘法不满足交换律, $ab \neq ba$

转动的描述

刚体运动的位形空间 = 体坐标架的原点坐标 + 体坐标架的转动参数

$$\{\vec{e}_j\} \xrightarrow{R} \{\vec{e}\,'_j\}$$

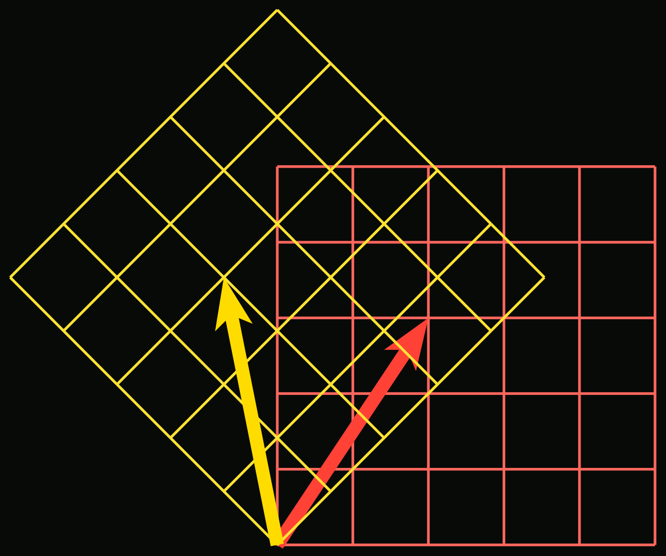
沿 x, y, z 轴转动 φ 角度的转动矩阵为

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rotate(z:45deg)



欧拉旋转定理

欧拉旋转定理：在三维空间中，任意的刚体转动都可以看成是绕着某一条定轴转动一个角度 φ。这个定轴和转动角度是唯一的。

Proof:

$$\begin{aligned}\det(R-I) &= \det(R^\top - I) = \det(R^\top(I-R)) \\ &= \det(R^\top)\det(I-R) \\ &= \det(I-R) \\ &= (-1)^3\det(R-I)\end{aligned}$$

因此 $\det(R-I)=0$，所以 R 有一个本征值为 1 的本征矢 $\vec{n}$。

体坐标架的转动参数 = 转动轴方向 $\hat{n}$ 的 2 个参数 + 转动角 ϕ 的 1 个参数

- 合在一起，转动的轴-角表示可以通过转动矢量来描述

$$\vec{\phi} = \phi\hat{n}$$

- 无穷小转动

$$R = I + \varepsilon K$$

- 正交矩阵的要求决定了 K 一定是反对称矩阵:

$$RR^\top = I \Longrightarrow K^\top = -K$$

- 三个反对称矩阵有多少个自由参数

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 任何反对称矩阵都可以写为以下三个矩阵的线性组合

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

称 K_j 为群的“生成元”

定轴转动

- 沿着某一个定轴转动有限大小角度 θ 的转动矩阵怎么写?
- 设 $\varepsilon = \frac{\theta}{N}$, N很大
- 设无穷小转动为

$$R\left(\frac{\theta}{N}\right) = \left(I + \frac{\theta}{N}K\right)$$

$$\Rightarrow R\left(\frac{\theta}{N}\right)^N = \left(I + \frac{\theta K}{N}\right)^N$$

- 求极限

$$R = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\theta K}{N}\right)^N = e^{\theta K}.$$

刚体运动之角速度

为了将动能 $T = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\,\dot{\vec{x}}^2\,\mathrm{d}\vec{x}$ 表示为相互独立的 6 个广义速度的函数，需要知道每个质点的速度。

- 条件：利用本体坐标架 $\{\vec{e}'_j\}$

$$\vec{x}(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}(t)$$
$$\vec{r}(t) = r_j\,\vec{e}'_j(t) = r_j R_{jk}(t)\,\vec{e}_k$$
$$\dot{\vec{r}} = r_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_j}{\mathrm{d}t} = r_j\dot{R}_{jk}\vec{e}_k = r_j\dot{R}_{jk}\left(R^{-1}\right)_{kl}\vec{e}'_l$$

- 定义 $K = \dot{R}R^{-1}$，转动引起的本体坐标架基矢变化速度为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_j}{\mathrm{d}t} = K_{jl}\vec{e}'_l$$

- 当前本体坐标架到下一时刻的本体坐标架的无穷小转动:

$$(R + \mathrm{d}R)R^{-1} = \mathbb{1} + K\,\mathrm{d}t$$

- 利用转动矩阵的性质 $R^{\mathsf{T}}R = \mathbb{1}$，可知 K 一定是一个反对称矩阵，可定义

刚体运动之角速度

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}K_{jk} \quad \text{和} \quad \vec{\Omega} = \Omega_i \vec{e}_i'$$

从而将 K 表示为

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \Omega_1 K_1 + \Omega_2 K_2 + \Omega_3 K_3$$

- K_1, K_2, K_3 为转动的生成元，是反对称矩阵。

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 位矢的变化率为

$$\dot{\vec{r}} = r_j K_{jl} \vec{e}_l' = \Big((K^{\mathsf{T}})_{lj} r_j \Big) \vec{e}_l'$$

- 在本体坐标系中，位矢变化率的矢量表示为

刚体运动之角速度

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 r_3 - \Omega_3 r_2 \\ \Omega_3 r_1 - \Omega_1 r_3 \\ \Omega_1 r_2 - \Omega_2 r_1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\vec{\Omega}}_{\text{角速度}} \times \vec{r}$$

- 角速度对应的广义坐标

$$\vec{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{\mathrm{d}t}$$

- 如果转动轴不随时间变化，则有

$$\vec{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{n}$$

刚体运动之角速度

这是三维空间的特殊性，可以定义了一个矢量间的叉乘来表示质点速度

$$\vec{x} = \vec{r}_c + \vec{r} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

- 质点动能

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_c^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 + m\vec{v}_c \cdot \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)$$

- 总动能（对质点动能求和或者积分）

$$T = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \underbrace{\sum_j m_j}_{\text{刚体总质量 } M} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}_j\right)^2}_{T_{\text{rot}}} + \underbrace{\left(\sum_j m_j \vec{r}_j\right)}_{=0 \text{ 为什么?}} \left(\vec{v}_c \times \vec{\Omega}\right)$$

转动惯量

- 运用矢量运算规律 $|a\times b|^2=|a|^2\,|b|^2\sin^2\varphi$ 和 $|a\cdot b|^2=|a|^2\,|b|^2\cos^2\varphi$，其中 φ 为这两个矢量的夹角，可得

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{b}^\mathsf{T}(\vec{a}^2\mathbb{1}-\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T})\vec{b}$$

于是有

$$\begin{aligned}T_{\text{rot}}&=\frac{1}{2}\sum_l m_l\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_l\right)^2=\frac{1}{2}\vec{\Omega}^\mathsf{T}\left[\underbrace{\sum_l m_l(\vec{r}_l^2\mathbb{1}-\vec{r}_l\vec{r}_l^\mathsf{T})}_{\text{惯量张量 } I}\right]\vec{\Omega}\\&=\frac{1}{2}\Omega_j I_{jk}\Omega_k\end{aligned}$$

惯量张量的矩阵元为

$$I_{jk}=\sum_l m_l(\vec{r}_l^2\delta_{jk}-\vec{r}_{l,j}\vec{r}_{l,k})$$

连续版本

转动惯量

$$I_{jk} = \int \rho(\vec{r})\left(\vec{r}^2\delta_{jk} - \vec{r}_j\vec{r}_k\right) \mathrm{d}\vec{r}$$

- 惯量张量是刚体的特征量，和刚体的运动状态无关。
- I_{jk} 可以进行对称化处理
- 对称的惯量张量可以被对角化，即在本体坐标系中选择恰当的基矢（主轴方向）使

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

- 如果 $I_1 \neq I_2 \neq I_3$，则称为非对称陀螺；否则，称为对称陀螺。
- 如果 $I_1 = I_2 = I_3$，则称为球陀螺。

$$I_{jk} = \int \rho(\boldsymbol{r})\left(\boldsymbol{r}^2\delta_{jk} - \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_k\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 位于一条直线上的原子构成的分子

$$r_\alpha = (0, 0, z_\alpha)$$

$$I_1 = I_2 = \sum_l m_\alpha (z_\alpha)^2, \quad I_3 = 0$$

角动量

- 角动量

$$J_j = \frac{\partial T}{\partial \Omega_j} = I_{jk}\Omega_k$$

- 角动量的方向和角速度的方向未必相等，除非角速度在主轴方向

第五章作业第 1、2、5 题

（下下周交）