

V 量子精密测量

量子信息的另一个重要的应用是量子精密测量。量子精密测量和量子传感技术融合在一起，旨在利用量子力学原理来提高测量精度。量子传感通过量子态和待测（经典）物理量之间的耦合，将待测物理量的信息传感到量子态上，然后利用量子精密测量来实现对物理参数的更高精度探测。系统中的噪声会导致测量误差，令测量的精度受限。测量结果中的随机性决定了测量的精度。和经典无噪声情况不同，量子测量产生结果的机制本身就是随机的。因此，即使在完全消除技术噪声的理想情况下，测量精度也会受到量子测量本身随机性的限制。但是，在另一方面，系统的量子特性也可以被用来提高测量的精度，甚至可以被用来超越经典的精度极限。

量子系统中的信息最终体现在实验数据中。需要把实验数据和理论模型相联系，才能从实验数据中推断理论模型中的一些概念要素。在量子力学中，量子期望值和实验平均值之间的联系正扮演了这样的一个桥梁作用。假设在量子态为 $|\psi\rangle$ 的系统上对可观测量 A 进行测量，将测量结果记作 a 。测量结果的期望值等于可观测量 A 在量子态 $|\psi\rangle$ 上的量子期望值 $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ，即

$$\mathbb{E}[a] = \sum_a ap(a) = \langle\psi|A|\psi\rangle. \quad (1)$$

在实验研究中，为了获得测量结果的期望值 $\mathbb{E}[a]$ ，需要将实验重复多次，然后求得样本平均：

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j, \quad (2)$$

其中 n 是样本数量（即实验的重复次数）。当样本数量趋于无穷时，样本平均才等于理论期望值，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \mathbb{E}[a]. \quad (3)$$

在有限样本的情况下，样本平均值存在统计误差。我们可以通过 S_n 的标准差来分析样本平均在统计误差下的不确定度。通过计算可得样本均值 S_n 的标准差为

$$\sigma(S_n) = \sqrt{\mathbb{E}[S_n^2] - \mathbb{E}[S_n]^2} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}[a^2] - \mathbb{E}[a]^2}}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta A}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

其中 $\Delta A := \sqrt{\langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2}$ 是可观测量 A 在量子态 $|\psi\rangle$ 上的涨落。综上所述，我们可以通过重复实验，从测量结果的样本均值去推断可观测量 A 的量子期望值。它的不确定度随着样本数量 n 的增加以 $1/\sqrt{n}$ 的标度在减小。接下来，我们会介绍测量结果的不确定度将会如何影响量子精密测量。

V.1 测量不确定度的量子极限

在量子精密测量问题中，我们感兴趣的通常是量子系统状态中某些未知参数的值。例如，在原子磁强计中原子极化状态依赖于外部磁场，该磁场强度是我们感兴趣的参数。将依赖于参数 θ 的量子态记作 $|\psi_\theta\rangle$ ，可观测量 A 的量子期望值 $\langle A \rangle_\theta \equiv \langle \psi_\theta | A | \psi_\theta \rangle$ 依赖于参数的真实值。那么，我们可以通过重复实验测量 A 的期望值，然后根据其与参数的关系反推出未知参数 θ 的值。根据上一小节，已知用样本均值 S_n 去推断量子期望值时的统计误差不确定度为 $\sigma(S_n) = (\Delta A)/\sqrt{n}$ 。当统计误差很小时，可以把函数做线性化近似，因此量子期望值的测量不确定度 $\sigma(S_n)$ 和参数 θ 的估计不确定度 $\delta\theta$ 之间成正比关系，比例系数为 $|\frac{d\langle A \rangle_\theta}{d\theta}|$ 。于是，我们有

$$\delta\theta \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Delta A}{|\frac{d\langle A \rangle_\theta}{d\theta}|}. \quad (5)$$

接下来，考虑一种最简单的量子传感的情况：参数通过么正演化进入到量子态中。此时，感知信号后的量子态可以表示为 $|\psi_\theta\rangle = \exp(-i\theta H)|\psi\rangle$ ，其中 H 是一个厄米算符， $|\psi\rangle$ 表示系统的初态。对于这类情况，有

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle_\theta}{d\theta} &= \left\langle \psi \left| \frac{d}{d\theta} (e^{i\theta H} A e^{-i\theta H}) \right| \psi \right\rangle \\ &= \langle \psi | e^{i\theta H} i[H, A] e^{-i\theta H} | \psi \rangle \\ &= i\langle \psi_\theta | [H, A] | \psi_\theta \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

应用海森堡 (Heisenberg) 不确定关系，有

$$(\Delta A)(\Delta H) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi_\theta | [H, A] | \psi_\theta \rangle|, \quad (7)$$

其中 ΔA 和 ΔH 分别是厄米算符 A 和 H 在量子态 $|\psi_\theta\rangle$ 上的涨落。于是，可得不等式

$$\delta\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Delta A}{|\frac{d\langle A \rangle_\theta}{d\theta}|} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}\Delta H}. \quad (8)$$

注意该不等式的右边和选择的可观测量 A 无关，它给出了所有测量下误差 $\delta\theta$ 必须遵循的下界。因此，我们可以根据该不等式来研究优化测量下估计误差的精度极限。同时，因为算符 $e^{-i\theta H}$ 和 H 是可对易的，所以 ΔH 可以表示为 H 在初态 $|\psi\rangle$ 上的涨落。于是，可以从增大 ΔH 的角度去对感知参数信息的初态进行最优化。关于更一般传感机制下估计误差精度极限的讨论，可以由量子参数估计理论来进行分析，在此不做赘述。

V.2 量子压缩在精密测量中的应用

从上述内容中可知，我们能够通过量子态的调控和量子测量的选择来优化提高测量精度。其中的一种重要方法是利用压缩态来抑制测量噪声。1976年 Yuen 预言压缩光能够给精密测量比经典光带来优越性。1981年 Caves 提出基于压缩光的马赫 (Mach) - 曾德 (Zehnder) 干涉仪增强相位测量的方案。1980年代后期，Slusher 等、Shelby 等以及吴令安等分别利用四波混频率、光纤以及光学参量振荡实现了光场压缩态。

我们在这里对压缩态做一个简单介绍。考虑一维粒子的波函数。根据量子力学中的正则对易关系，该粒子的位置 Q 和动量 P 的涨落必须遵从海森堡 (Heisenberg) 不确定关系：

$$(\Delta Q)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (9)$$

使上述不等式中等号成立的同时，如果要进一步减小 ΔQ 的值，则势必会伴随着另一项 ΔP 的增大。这样的过程，被形象地称为“压缩”。在量子光学中，光场被分解成不同模式的叠加。每一个模式都可被视为一维谐振子，可以通过两个满足正则对易关系的正交分量来描述。对于真空态来说，这两个正交分量也都存在各自的涨落，会以噪声的形式影响到后续的观测。在干涉仪中，正是通过压缩关键正交分量的涨落来实现更好的测量精度。引力波观测站就是一个大型（单臂长约 4 千米）的迈克尔逊 (Michelson) 干涉仪（见 Figure 15）。它的原理如 Figure 16 所示，通过干涉仪对两臂光程差的精密测量，来探测引力波事件所造成的时空微小扰动。2016年，LIGO 和 Virgo 引力波观测站合作，首次直接观测到引力波。巴里什 (Barish)、索恩 (Thorne) 和魏斯 (Weiss) 因领导此项工作而荣获 2017 年诺贝尔物理学奖。2019年，引力波观测站 LIGO 和 VIRGO 成功利用压缩光显著地增加了引力波事件被观测到的频次。



Figure 15: 引力波观测站 (Hanford) 外貌。照片来自 Caltech/MIT/LIGO Lab。

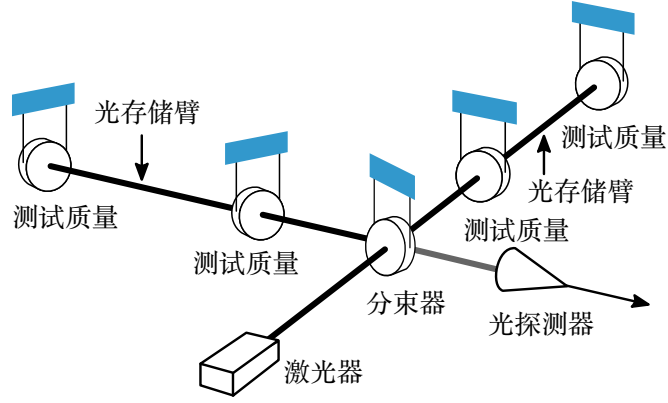


Figure 16: 引力波观测站原理示意图。

V.3 量子纠缠在精密测量中的应用

除了量子压缩外，量子纠缠也是一种可以实现量子增强精密测量的重要资源。2006年，Giovannetti 等 [2] 给出了一个纠缠增强精密测量的分析框架。我们在此做简单介绍。从不等式 $\delta\theta \geq 1/(2\sqrt{n}\Delta H)$ 可以看出，对于 $|\psi_\theta\rangle = e^{-i\theta H} |\psi\rangle$ 这类的信号感知与估计问题，可以优化初态 $|\psi\rangle$ 使得 ΔH 尽可能大。这样的初态，对于信号感知的敏感度最大。对于有限维系统，使 ΔH 最大的初始态为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_M\rangle + |\lambda_m\rangle), \quad (10)$$

其中 $|\lambda_M\rangle$ 和 $|\lambda_m\rangle$ 分别是 H 的最大本征值和最小本征值所对应的本征态。在该初始态上计算可得

$$\Delta H = \frac{\lambda_M - \lambda_m}{2}. \quad (11)$$

为了证明该结论，可以设初态为 $|\psi\rangle = \sum_j c_j |\lambda_j\rangle$ ，其中 $|\lambda_j\rangle$ 是 H 的本征值为 λ_j 的本征态。于是可得

$$(\Delta H)^2 = \sum_j |c_j|^2 (\lambda_j - \langle H \rangle)^2 \quad (12)$$

假设我们有多多个相同的量子传感器可以同时使用，每个传感器可以通过对量子态做一个么正操作 $U_\theta = e^{-i\theta H}$ 来将待测量的信号参数 θ 的信息引入到传感器的量子态上。我们可以将多个传感器“捆绑”在一起看做是一个复合传感器，如图 16(a) 所示。那么，复合传感器的传感操作为整体 Hilbert 空间上的么正操作 $\exp(-i\theta H_{\text{total}})$ ，其中 $H_{\text{total}} = \sum_j H_j$ 是每个传感器的么正操作生成元。如果每个传感器的初始态被设置为各自的最优态，那么 H 的涨落为

$$\Delta H = \sqrt{\sum_{jk} (\langle H_j H_k \rangle - \langle H_j \rangle \langle H_k \rangle)} = \frac{\sqrt{N(\lambda_M - \lambda_m)}}{2}. \quad (13)$$

因此，独立传感下给出的误差下界 $\delta\theta \geq 1/[\sqrt{nN}(\lambda_M - \lambda_m)]$ 。注意，这里 n 是实验重复的次数， N 是每一次实验中同时工作的传感器数目。

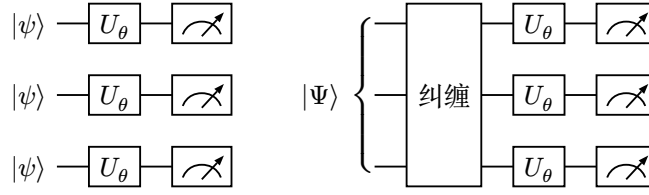


Figure 17: 左：独立传感下的测量方案；右：纠缠增强的测量方案。

接下来，考虑各传感器的初始态允许纠缠的情况，如 Figure 17 右图，那么根据上面的结论，最优的初始态应该是整体生成元 H 的最大本征值和最小本征值所对应的本征态的叠加态。 H 取最大本征值的情况对应于每个传感器上的量子态都处在其最大本征值所对应的本征态上，即 $|\lambda_M\rangle \otimes |\lambda_M\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_M\rangle$ ；类似地， H 取最小本征值的量子态为 $|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_m\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_m\rangle$ 。该情况下， H 的涨落为

$$\Delta H = \frac{N(\lambda_M - \lambda_m)}{2}. \quad (14)$$

对比于独立传感下的误差下界，纠缠增强情况下的误差下界为 $\delta\theta \geq 1/[N\sqrt{n}(\lambda_M - \lambda_m)]$ 。重点注意两种情况下对于 N 的不同标度。可以看出当 N 较大时，纠缠带来的精度提升非常可观。进一步地，通过计算

$$X = |\lambda_M\rangle\langle\lambda_m| + |\lambda_m\rangle\langle\lambda_M| \quad (15)$$

的涨落和误差传播因子，可以确认纠缠增强情况下的误差下界是可以被上述可观测达到的。